

مدرسة مصر الخير الإعدادية لجهينة - سوهاج

الترم
الثاني

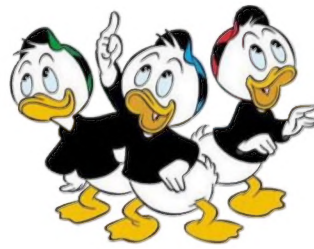
الصف الثالث الإعدادي

٢٠٢٠

إهداء إلى الطالبة



ملزمة
الهندسة



إعداد وتصميم

محمود عوض حسن

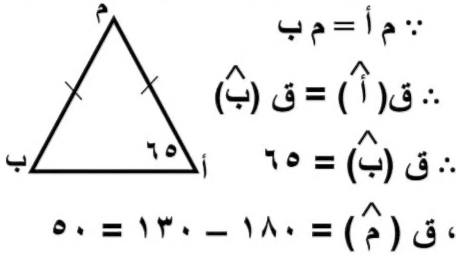
معلم أول رياضيات

استعدوا للمغامرة

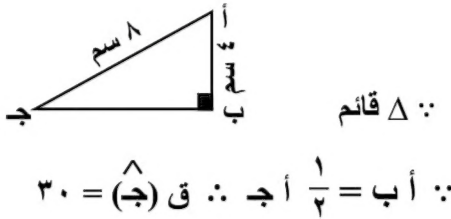


أساسيات تراكمية

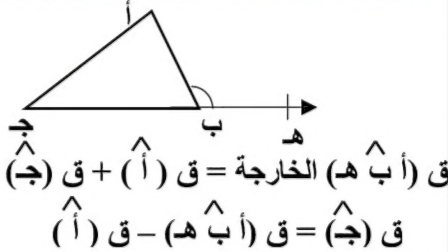
في المثلث المتساوي الساقين زاويتا القاعدة متساويتان



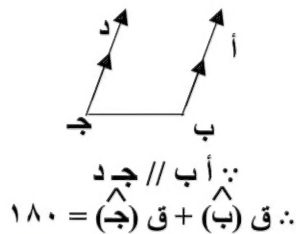
إذا كان طول الضلع = نصف طول الوتر فإن الزاوية المقابلة له = 30°



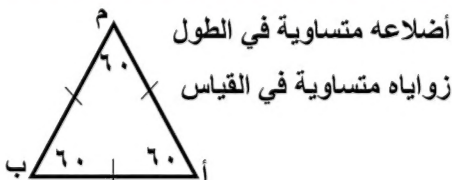
قياس الزاوية الخارجة عن المثلث = مجموع الزاويتين الداخلتين عدا المجاورة



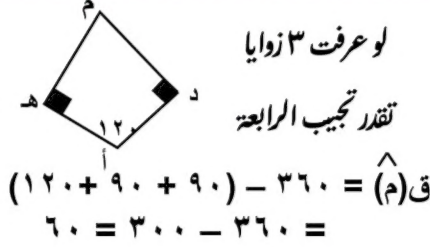
إذا وجد توازي حرف U فإن الزاويتان المتداخلتان متكاملتان



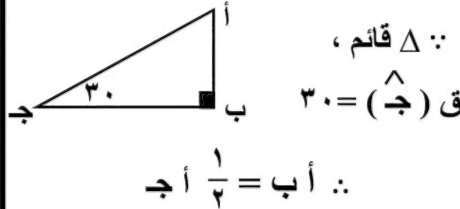
المثلث المتساوي الأضلاع



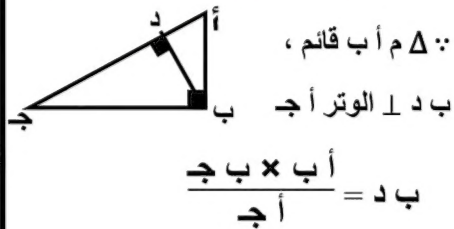
مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = 360°



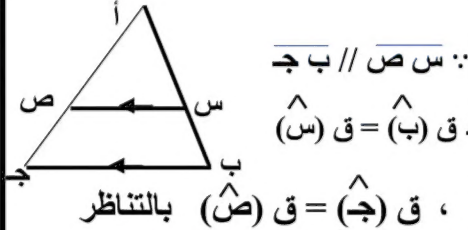
طول الضلع المقابل للزاوية 30° نصف طول الوتر =



نظرية إقليدس



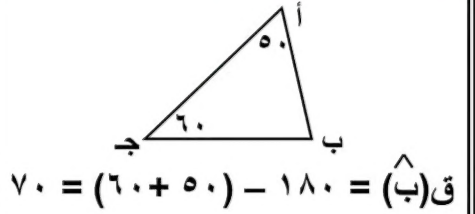
إذا وجد توازي حرف F فإن الزاويتان المتناظرتان متساويتان



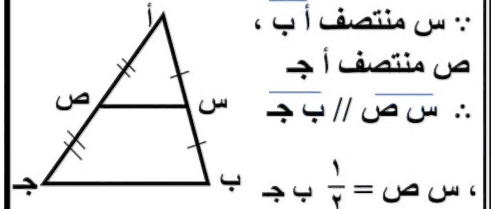
حالات تطابق مثلثين

- ضلعان والزاوية المحصورة بينهما
- زاويتان والضلع المرسوم بينهما
- وتر وضلع (في المثلث القائم)

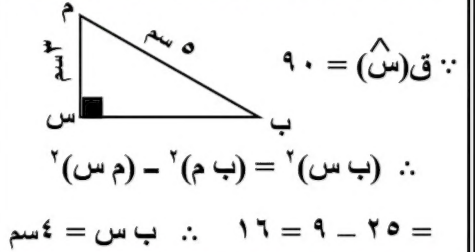
مجموع قياسات زوايا $\Delta = 180^\circ$



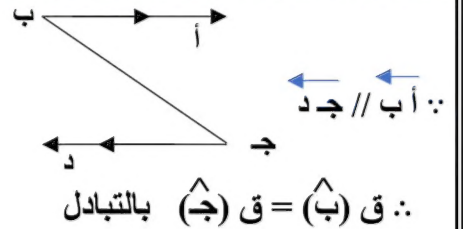
القطعة الواصلة بين منتصفى ضلعين توازي الضلع الثالث



نظرية فيثاغورث



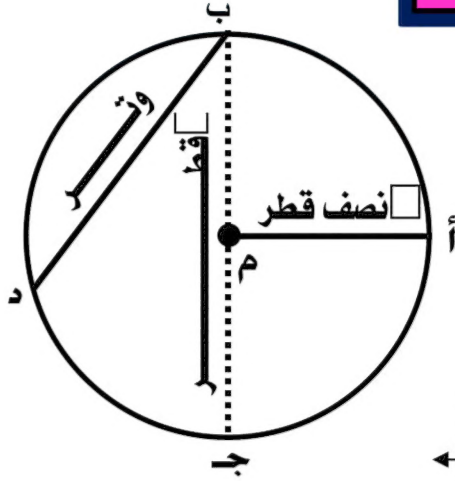
إذا وجد توازي حرف Z فإن الزاويتان المتبادلتان متساويتان



إثبات التوازي

نبحث عن إحدى الحالات الآتية:

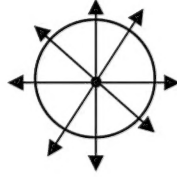
- زاويتان متبادلتان متساويتان
- زاويتان متناظرتان متساويتان
- زاويتان متداخلتان متكاملتان



نصف القطر : هو قطعة مستقيمة طرفها مركز الدائرة وأى نقطة على الدائرة

الوتر : هو قطعة مستقيمة طرفها أى نقطتين على الدائرة

القطر : هو وتر مار بمركز الدائرة ، وهو أطول الأوتار طولاً



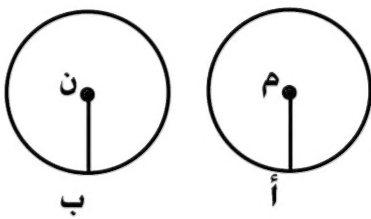
محاور التماثل : هو المستقيم المار بمركز الدائرة.

الدائرة لها عدد لا نهائى من محاور التماثل

عدد محاور تماثل نصف أو ربع أو ثلث الدائرة محور واحد

الفرق بين الدائرة وسطح الدائرة

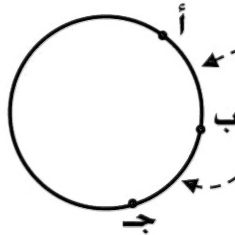
الدائرة	سطح الدائرة	ملحوظة مهمة
الخط الأسود المرسوم ده هو الدائرة	هو الخط الأسود + الجزء المظلل	<p>$\{A, B\} \cap \text{الدائرة} = M$</p> <p>بينما $\overleftrightarrow{AB} \cap \text{سطح الدائرة} = \overline{AB}$</p>



الدائرتان المتطابقتان : هما دائرتان أنصاف أقطارهما متساوية في الطول.

إذا كانت م ، ن دائرتان متطابقتان فإن $M = N$

القوس : هو جزء من خط الدائرة



من أ إلى ب يسمى قوس ويكتب : \widehat{AB}

من ب إلى ج يسمى قوس ويكتب : \widehat{BC}

من أ إلى ج يسمى قوس ويكتب : \widehat{AC} أو \widehat{ABJ}

محيط الدائرة = 2π نق

طول ربع الدائرة = $\frac{1}{4}\pi$ نق

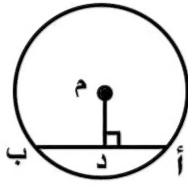
مساحة الدائرة = π نق²

طول نصف الدائرة = π نق

نتائج هامة



المستقيم المار بمركز الدائرة
وعمودياً على أي وتر فيها
ينصف هذا الوتر



$\therefore \overline{MB} \perp \overline{AD}$

$\therefore \overline{MB}$ منتصف \overline{AB} $\therefore \overline{AB} = \overline{BD}$

فإذا كان $\overline{AB} = 8$ سم فإن $\overline{AD} = 16$ سم

مثال ٢



أوجد طول \overline{AD}

الحل:

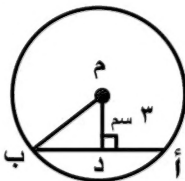
في $\triangle MBD$ من فيثاغورث

$\overline{BD} = 8$ سم

$\therefore \overline{MB} \perp \overline{AD}$ $\therefore \overline{MB}$ منتصف \overline{AB}

$\therefore \overline{AD} = \overline{BD} = 8$ سم

تدريب ٢



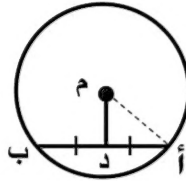
$\overline{AB} = 8$ سم أوجد \overline{MB}

.....

.....

.....

المستقيم المار بمركز الدائرة
وبمنتصف أي وتر فيها
يكون عمودياً على هذا الوتر

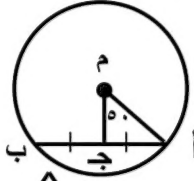


$\therefore \overline{MB}$ منتصف الوتر \overline{AB}

$\therefore \overline{MB} \perp \overline{AB}$

$\therefore \angle CMB = 90^\circ$

مثال ٢



أوجد $\angle CMB$

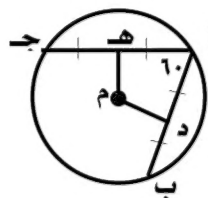
الحل:

$\therefore \overline{MB}$ منتصف \overline{AB} $\therefore \overline{MB} \perp \overline{AB}$

$\therefore \angle CMB = 90^\circ$

$\therefore \angle CMB = 90^\circ = 180^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

تدريب ٢



أوجد $\angle CMB$

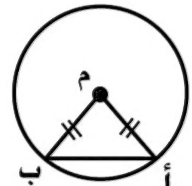
.....

.....

.....



أنصاف الأقطار في الدائرة
الواحدة متساوية في الطول



$\therefore \overline{MB} = \overline{AB}$ أنصاف أقطار

$\therefore \overline{MB} = \overline{AB}$

أي أن $\angle CMB = \angle CMA$

مثال ١



أوجد $\angle CMB$

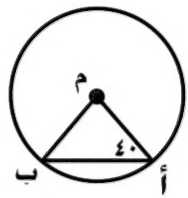
الحل:

$\therefore \overline{MB} = \overline{AB}$ أنصاف أقطار

$\therefore \angle CMB = \angle CMA$

$50^\circ = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} =$

تدريب ١



أوجد $\angle CMB$

.....

.....

.....

١ في الشكل المقابل :

د، ه منتصفا أ ب، أ ج
على الترتيب
ق (أ) = 120°
اثبت أن Δ س ص م متساوي الأضلاع

الحل

∴ د منتصف أ ب ∴ م د \perp أ ب

∴ ق (م د أ) = 90°

∴ ه منتصف أ ج ∴ م ه \perp أ ج

∴ ق (م ه أ) = 90°

∴ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = 360°

∴ ق (د م ه) = $(120 + 90 + 90) - 360 = 60^\circ$

∴ ق (ص م س) = 60° بالتقابل بالرأس

∴ م ص = م س (أنصاف أقطار)

∴ ق (م ص س) = ق (م س ص) = 60°

∴ Δ س ص م متساوي الأضلاع (جميع زواياه 60°)

٢ في الشكل المقابل :

م دائرة طول نصف قطرها ١٣ سم
أ ب وتر فيها طوله ٢٤ سم
ج منتصف أ ب
أوجد: مساحة Δ أ د ب

الحل

∴ ج منتصف أ ب ∴ م ج \perp أ ب ∴ ق (م ج أ) = 90°

∴ أ ب = ٢٤ سم ∴ أ ج = ١٢ سم

في Δ م ج أ القائم : بتطبيق فيثاغورث

∴ (م ج) = $2(13)^2 - 2(12)^2 = 25$

∴ م ج = ٥ سم ، ∴ م د = ١٣ سم

∴ ج د = $13 - 5 = 8$ سم

∴ مساحة المثلث = $\frac{1}{2} \times \text{طول القاعدة} \times \text{الارتفاع}$

∴ مساحة Δ أ د ب = $\frac{1}{2} \times 24 \times 8 = 96$ سم^٢

٣ في الشكل المقابل :

أ ب وتر في الدائرة م
أ ج ينصف ب أ م
د منتصف أ ب
اثبت أن د م \perp ج م

الحل

في Δ أ م ج : ∴ م أ = م ج (أنصاف أقطار)

∴ ق (م أ ج) = ق (م ج أ) = 60° (١)

∴ ق (م أ ج) = ق (ب أ ج) = 60° (٢) معطى

من ١، ٢ ينتج أن:

ق (م ج أ) = ق (ب أ ج) وهما متبادلتان

∴ أ ب \parallel ج م

∴ د منتصف أ ب ∴ م د \perp أ ب

∴ أ ب \parallel ج م ∴ د م \perp ج م

٤ في الشكل المقابل :

م س \perp أ ب ، م ص \perp أ ج
ق (أ) = 60°
ق (ب) = 70°
أوجد قياسات زوايا Δ م س ص

الحل

ق (ج) = $(60 + 70) - 180 = 50^\circ$

∴ م س \perp أ ب ∴ س منتصف أ ب

∴ م ص \perp أ ج ∴ ص منتصف أ ج

∴ س ص \parallel ب ج (قطعة واصله بين منتصفى ضلعين)

∴ ق (أ س ص) = 70° ، ق (أ ص س) = 50° بالتناظر

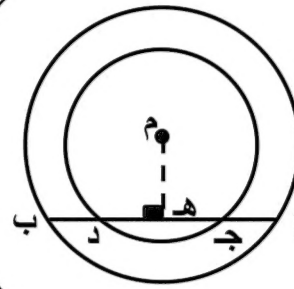
∴ ق (م س ص) = $90 - 70 = 20^\circ$

∴ ق (م ص س) = $90 - 50 = 40^\circ$

في Δ س م ص :

ق (س م ص) = $(40 + 20) - 180 = 120^\circ$

١

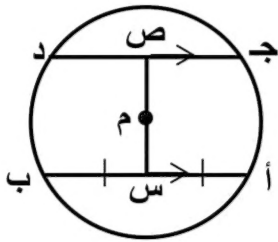


دائرتان متحدتا المركز م
أ ب وتر في الدائرة الكبرى
يقطع الصغرى في ج د
اثبت أن : $أ ج = ب د$

الحل

العمل : نرسم م ه عمودى على أ ب

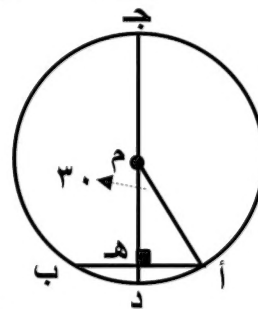
٢



أ ب // ج د
س منتصف أ ب
اثبت أن :
ص منتصف ج د

الحل

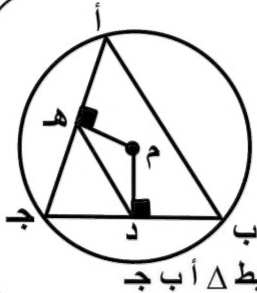
٣



ج د قطر في الدائرة م
م ه \perp أ ب
ق (أ م ه) $= 30^\circ$
أ ب = ١٠ سم
أوجد طول ج د ، ه د

الحل

٤



أ ب ج د Δ مرسوم داخل دائرة
م د \perp ب ج ، م ه \perp أ ج
اثبت أن : (١) ه د // أ ب
(٢) محيط Δ ج د ه = $\frac{1}{2}$ محيط Δ أ ب ج

الحل

أوضاع نقطة ومستقيم بالنسبة لدائرة



أوضاع نقطة بالنسبة لدائرة

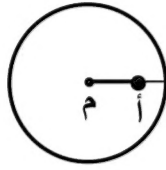
إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها نق ، أ نقطة فإن النقطة أ تقع :

على المركز



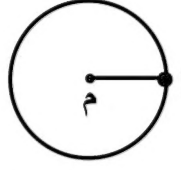
إذا كان : م أ = صفر

داخل الدائرة



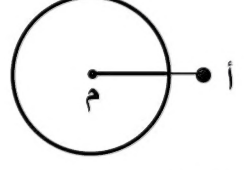
إذا كان : م أ > نق

على للدائرة



إذا كان : م أ = نق

خارج الدائرة

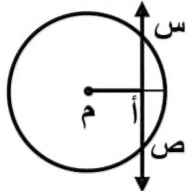


إذا كان : م أ < نق

أوضاع مستقيم بالنسبة لدائرة

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها نق ، أ نقطة ∩ المستقيم فإن المستقيم يكون :

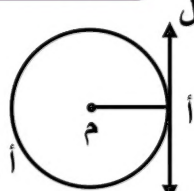
قاطع للدائرة



إذا كان : م أ > نق

$\vec{L} \cap \text{الدائرة م} = \{ \text{س} , \text{ص} \}$
 $\vec{L} \cap \text{سطح م} = \overline{\text{س ص}}$

مماس للدائرة

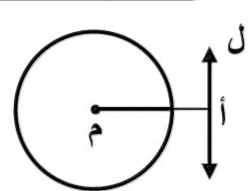


أ : نقطة التماس

إذا كان : م أ = نق

$\vec{L} \cap \text{الدائرة م} = \{ \text{أ} \}$
 $\vec{L} \cap \text{سطح م} = \{ \text{أ} \}$

خارج الدائرة



إذا كان : م أ < نق

$\vec{L} \cap \text{الدائرة م} = \emptyset$
 $\vec{L} \cap \text{سطح م} = \emptyset$

تدريب

إذا كانت م دائرة طول قطرها ٨ سم ، والمستقيم ل يبعد عن مركزها ٤ سم فإن المستقيم ل يكون

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٣ سم ، أ نقطة في المستوى بحيث م أ = ٤ سم فإن أ تقع الدائرة

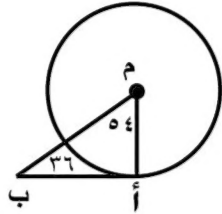
إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٧ سم ، والمستقيم ل مماس ، فإن المستقيم ل يبعد عن مركزها سم

نتائج هامة على المماس

إعداد / محمد هادي عوض

إثبات أن المستقيم مماس

هنثبت ان الزاوية التي بينه وبين نصف القطر قياسها ٩٠



تدريب في الشكل المقابل

اثبت أن أ ب مماس

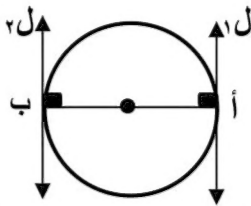
الحل

في $\triangle MAB$:

$$\angle MAB = 180^\circ - (54^\circ + 36^\circ) = 90^\circ$$

\therefore أ ب مماس

المماسان المرسومان من نهايتي قطر متوازيان

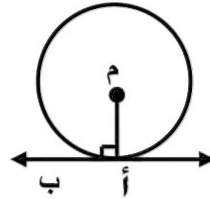


\therefore أ ب قطر
ل١ ، ل٢ مماسان
 $\therefore \vec{L1} \parallel \vec{L2}$

ملحوظة : المماسان المرسومان من نهايتي وتر متقاطعان

المماس عمودي على نصف القطر

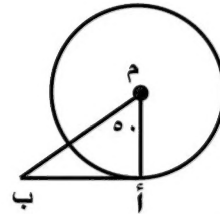
المرسوم من نقطة التماس



\therefore أ ب مماس ، م أنصف قطر
 $\therefore MA \perp AB$

$$\angle MAB = 90^\circ$$

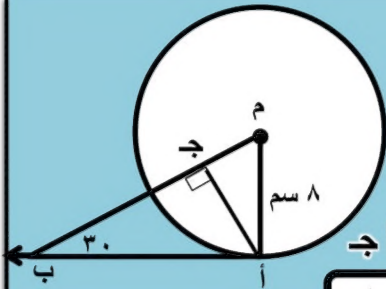
تدريب



في الشكل المقابل :
أ ب مماس للدائرة
أوجد $\angle B$

الحل

مثال ٢



أ ب مماس للدائرة عند أ

$$MA = 8 \text{ سم}$$

$$\angle MAB = 30^\circ$$

أوجد طول كل من أ ب ، أ ج

الحل

\therefore أ ب مماس $\therefore MA \perp AB$ $\therefore \triangle MAB$ قائم

$$\angle MAB = 30^\circ \therefore \angle MBA = 60^\circ$$

من فيثاغورث : في $\triangle MAB$

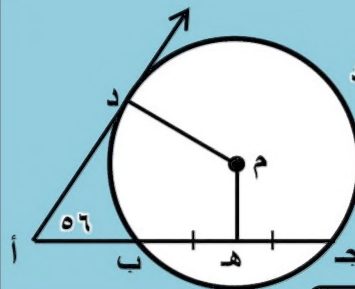
$$AB^2 = MB^2 - MA^2 = 16^2 - 8^2 = 192 \therefore AB = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}$$

في $\triangle MAB$: \therefore أ ج هو الضلع المقابل للزاوية 30°

$$\therefore \frac{1}{2} \text{ الوتر أ ب } = \frac{1}{2} \times 8\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \therefore \text{أ ج} = 4\sqrt{3}$$

ملحوظة : يمكن حساب أ ج باستخدام نظرية اقليدس

مثال ١



أ د مماس للدائرة عند أ

$$MA = 8 \text{ سم}$$

$$\angle MAB = 56^\circ$$

أوجد $\angle DMB$

الحل

\therefore أ د مماس ، م أنصف قطر $\therefore MA \perp AD$

$$\angle MAB = 56^\circ$$

\therefore ه منتصف ج ب $\therefore MA \perp AB$

$$\angle MAB = 56^\circ$$

\therefore مجموع قياسات الشكل الرباعي م ه أ د = 360°

$$\therefore \angle DMB = (90^\circ + 90^\circ + 56^\circ) - 360^\circ = 124^\circ$$

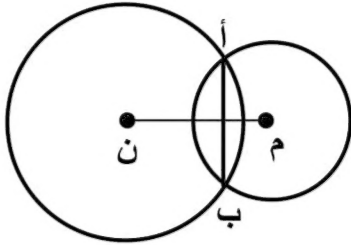
$$124^\circ = 236^\circ - 360^\circ$$

أوضاع دائرة بالنسبة لدائرة

أعواد / مجهود عوض

إذا كانت م ، ن دائرتان طولاً نصفى قطريهما نق_١ ، نق_٢ ، م ن خط المراكز فإن الدائرتان تكونان :

٣ متقاطعتان

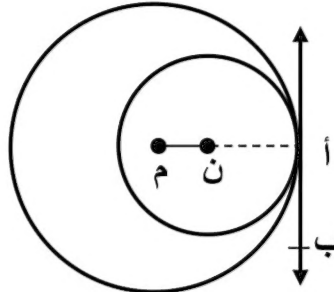


* نق_١ - نق_٢ < م ن < نق_١ + نق_٢

الطرح > م ن > المجموع

* الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ ، ب }
* أ ب يسمى وتر مشترك

٢ متماستان من الداخل

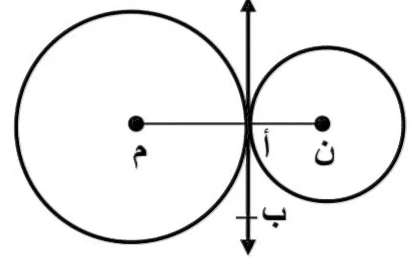


* إذا كان : م ن = نق_١ - نق_٢

م ن = الطرح

* الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }
* سطح م ∩ سطح ن = سطح ن
* أ ب يسمى مماس مشترك

١ متماستان من الخارج

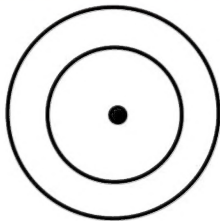


* إذا كان : م ن = نق_١ + نق_٢

م ن = المجموع

* الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }
* سطح م ∩ سطح ن = { أ }
* أ ب يسمى مماس مشترك

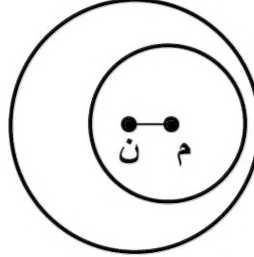
٦ متحدة المركز



* إذا كان : م ن = صفر

* الدائرة م ∩ الدائرة ن =
* سطح م ∩ سطح ن = سطح م

٥ متداخلتان

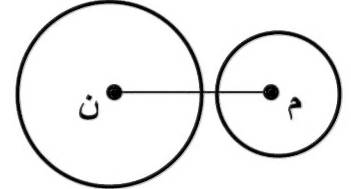


* م ن > نق_١ - نق_٢

م ن > الطرح

* الدائرة م ∩ الدائرة ن = Φ
* سطح م ∩ سطح ن = سطح م

٤ متباعدتان



* إذا كان : م ن < نق_١ + نق_٢

م ن < المجموع

* الدائرة م ∩ الدائرة ن = Φ
* سطح م ∩ سطح ن = Φ

ملحوظة : عشان تحدد وضع الدائرتان اجمع نق_١ + نق_٢ واطوح نق_١ - نق_٢ وقارنهم بخط المراكز

تدريب

م ، ن دائرتان طولاً نصفى قطريهما ٩ سم ، ٥ سم حدد موضع الدائرتان عندما :

٣- م ن = ٣ سم
الدائرتان

٢- م ن = ٤ سم
الدائرتان

١- م ن = ١٤ سم
الدائرتان

٦- م ن = ٧ سم
الدائرتان

٥- م ن = صفر
الدائرتان

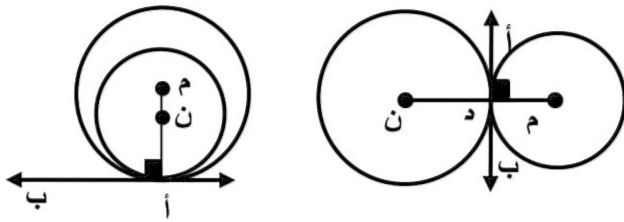
٤- م ن = ١٦ سم
الدائرتان

نتائج هامة على خط المركزين



في الدائرتان المتماستان

خط المركزين عمودي على المماس المشترك

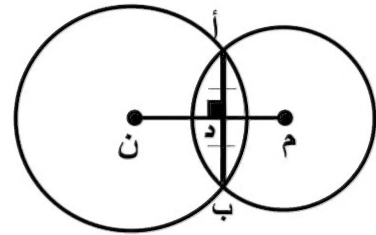


∴ \overline{AB} مماس مشترك ، \overline{MN} خط المركزين
 ∴ $\overline{MN} \perp \overline{AB}$ ∴ $\angle (M \hat{D} A) = 90^\circ$



في الدائرتان المتقاطعتان

خط المركزين عمودي على الوتر المشترك وينصفه

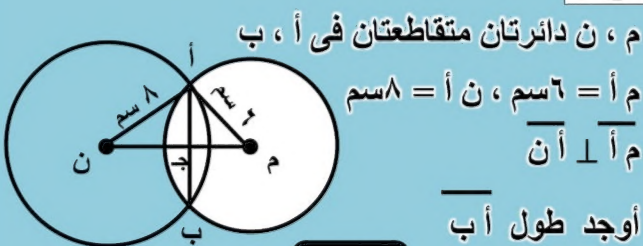


∴ \overline{AB} وتر مشترك ، \overline{MN} خط المركزين
 ∴ $\overline{MN} \perp \overline{AB}$ ∴ $\angle (M \hat{D} A) = 90^\circ$
 ، \overline{MN} ينصف \overline{AB} ∴ $AD = DB$

نصائح هامة

معلم اول رياضيات

مثال ٢



الحل

في $\triangle AMN$ (من فيثاغورث) :

$$\because \overline{MA} \perp \overline{MN} \therefore (MN)^2 = 6^2 + 8^2 = 100$$

$$\therefore MN = 10 \text{ سم}$$

∴ \overline{AB} وتر مشترك ∴ $\overline{MN} \perp \overline{AB}$

$$\text{مع إقليدس: } \overline{AD} = \frac{AM \times AN}{MN} = \frac{6 \times 8}{10} = 4,8 \text{ سم}$$

∴ \overline{AB} وتر مشترك ∴ \overline{MN} ينصف \overline{AB}

$$\therefore \overline{AB} = 4,8 \times 2 = 9,6 \text{ سم}$$

مثال ١



الحل

∴ \overline{AB} وتر مشترك ، \overline{MN} خط المركزين

∴ $\overline{AB} \perp \overline{MN}$ ∴ $\angle (A \hat{H} N) = 90^\circ$

∴ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = 360°

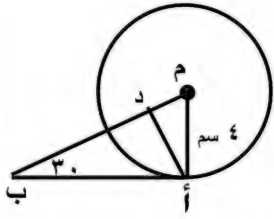
$$\therefore \angle (D) = (90 + 55 + 125) - 360 = 90^\circ$$

∴ $\overline{ND} \perp \overline{AB}$

∴ \overline{ND} مماس

(وهو المطلوب اثباته)

تدريبات



أكمل :

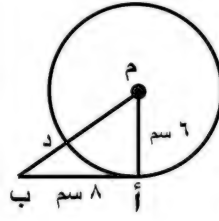
$$\widehat{ق(مأب)} = \dots\dots\dots$$

$$مب = \dots\dots\dots سم$$

$$أب = \dots\dots\dots سم$$

$$\widehat{ق(م)} = \dots\dots\dots$$

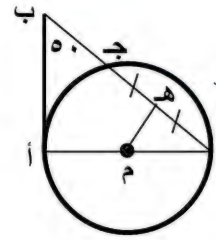
$$أد = \dots\dots\dots سم$$



أب مماس

أوجد طول دب

الحل

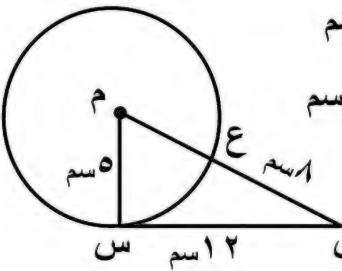


أب مماس ، د أ قطر
هـ منتصف جـ د

$$\widehat{ق(ب)} = 50^\circ$$

أوجد : ق (أ م هـ)

الحل

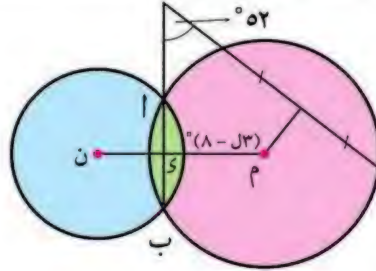


م دائرة طول نصف قطرها ٥ سم

ص ع = ٨ سم ، ص س = ١٢ سم

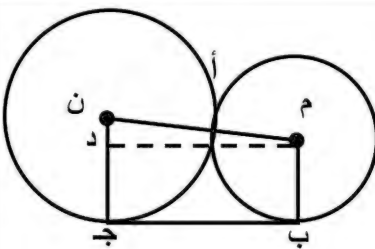
اثبت أن س ص مماس

الحل



أوجد قيمة ل

الحل



م ، ن دائرتان متماستان

ب ج مماس مشترك

م ب = ٥ سم ، ن ج = ٨ سم

أوجد طول ب ج

الحل

العمل : نرسم $م د \perp ن ج$

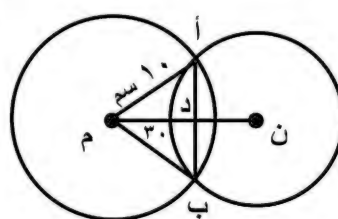
∴ ب ج مماس مشترك ∴ م ب $\perp ب ج$ ، ن ج $\perp ب ج$

∴ الشكل م ب ج د مستطيل

$$\therefore د ج = م ب = ٥ سم \quad \therefore ن د = ٨ - ٥ = ٣ سم$$

م ن = ٨ + ٥ = ١٣ سم ومن فيثاغورث في $\Delta م د ن$:

$$(١٠) \quad (م د)^2 = ١٦٩ - ٩ = ١٦٠ \quad م د = \sqrt{١٦٠} \quad ب ج = \sqrt{١٠}$$



م ، ن دائرتان متقاطعتان

$$م أ = ١٠ سم$$

$$\widehat{ق(ب م ن)} = 30^\circ$$

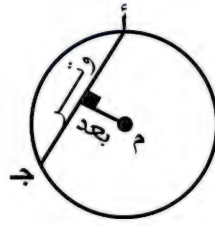
أوجد طول أب

الحل

العلاقة بين الأوتار والأبعاد



أبعاد / محيط

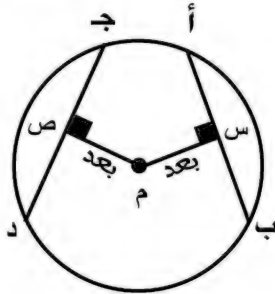


البعد لازم يكون عمودى

ولو قالك انه ينصف الوتر استنتج من التنصيف انه عمودى

في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة

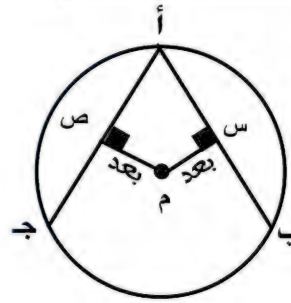
**إذا كانت الأبعاد متساوية
فإن الأوتار تكون متساوية**



$\therefore \text{م س} = \text{م ص}$
(الأبعاد متساوية)
 $\therefore \text{أ ب} = \text{ج د}$
(الأوتار متساوية)

في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة

**إذا كانت الأوتار متساوية
فإن الأبعاد تكون متساوية**

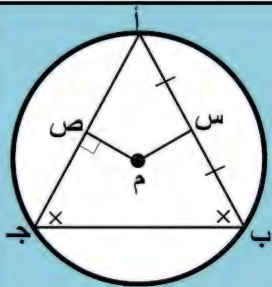


$\therefore \text{أ ب} = \text{ج د}$
(الأوتار متساوية)
 $\therefore \text{م س} = \text{م ص}$
(الأبعاد متساوية)

لو عطالك وترين متساويين : استنتج ان البعدين متساويين والعكس.

ولو طلب منك تثبت ان وترين متساويين : حاول تثبت ان البعدين متساويين والعكس.

مثال ٢



أ ب ج Δ مرسوم داخل دائرة م
ق (ب) = ق (ج) (\hat{C})
س منتصف أ ب ، م ص \perp أ ج
اثبت أن : م س = م ص

الحل

\therefore س منتصف أ ب \therefore م س \perp أ ب

في Δ أ ب ج :

\therefore ق (ب) = ق (ج) (\hat{C})

\therefore أ ب = أ ج \therefore أوتار متساوية

\therefore م س = م ص (الأبعاد متساوية)

مثال ١

مسألة من التماثل



أ ب = أ ج
م د \perp أ ب ، م هـ \perp أ ج
اثبت أن : س د = ص هـ

الحل

\therefore أ ب = أ ج (أوتار متساوية)

\therefore م د \perp أ ب ، م هـ \perp أ ج

\therefore م د = م هـ (١) (الأبعاد متساوية)

\therefore م س = م ص (٢) (أنصاف أقطار)

بطرح ١ من ٢ ينتج أن :

س د = ص هـ



٣ الدائرة م \cap الدائرة ن = {أ، ب}

م س \perp أ د
م ص \perp ب د

اثبت أن: م س = م ص

الحل

∴ أ ب وتر مشترك ، م ن خط المراكز

∴ م ن \perp أ ب ، ج منتصف أ ب

أي أنه في \triangle د أ ب : د ج محور تماثل أ ب

لأن د ج \perp أ ب و تنصفه

∴ \triangle د أ ب متساوي الساقين

∴ د أ = د ب وهي أوتار متساوية

∴ م س = م ص أبعاد متساوية

ملحوظة: يمكن الإثبات عن طريق تطابق \triangle د أ ج ، ب د ج

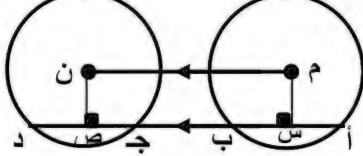
٤ م ، ن دائرتان متطابقتان

رسم أ ب // م ن
فقطع الدائرة م في أ ، ب
وقطع الدائرة ن في ج ، د

اثبت أن : أ ج = ب د

الحل

العمل: نرسم م س \perp أ ب ، ن ص \perp ج د



∴ م ن // أ ب ، م س \perp أ ب ، ن ص \perp ج د

∴ الشكل م س ص ن مستطيل

∴ م س = م ص (أبعاد متساوية)

∴ أ ب = ج د (الأوتار متساوية)

بإضافة ب ج للطرفين

∴ أ ج = ب د هـ ط ث

٥ أ ب ج \triangle فيه أ ب = أ ج

م س \perp ب د ، م ص \perp ج هـ

اثبت أن : ب د = ج هـ

الحل

\triangle م س ب ، م ص ج فيهما :

م ب = م ج أنصاف أقطار

ق (م س ب) = ق (م ص ج) = 90°

ق (ب) = ق (ج) لأن أ ب = أ ج

∴ \triangle م س ب \equiv \triangle م ص ج

ومن التطابق ينتج أن : م س = م ص (أبعاد)

∴ م س \perp ب د ، م ص \perp ج هـ

∴ ب د = ج هـ

٦ أ ب ، أ ج وتران متساويان في الطول في الدائرة م

س ، ص منتصفا أ ب ، أ ج على الترتيب

ق (م س ص) = 30°

اثبت أن : ١- \triangle م س ص متساوي الساقين

٢- \triangle أ س ص متساوي الأضلاع

الحل

∴ س منتصف أ ب ∴ م س \perp أ ب

∴ ص منتصف أ ج ∴ م ص \perp أ ج

∴ أ ب = أ ج (أوتار متساوية)

∴ م س = م ص (أبعاد متساوية)

∴ \triangle م س ص متساوي الساقين

∴ ق (م س ص) = 30° ، ق (م س أ) = 90°

∴ ق (أ س ص) = $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

ق (أ ص س) = 60° ، ق (أ) = 60°

∴ \triangle أ س ص متساوي الأضلاع

١

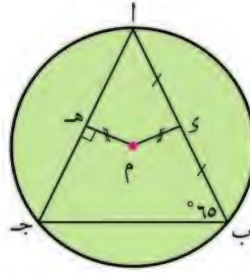
إذا كان:

$$م = س = م هـ$$

$$و هـ (\angle ب) = 65^\circ$$

فاوجد:

$$و (\angle ا)$$



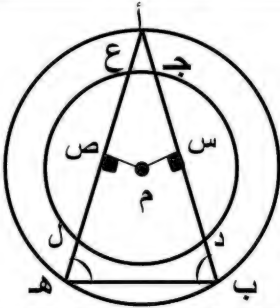
الحل

٢

دائرتان متحدتا المركز م

$$ق (\angle ب) = ق (\angle هـ)$$

اثبت أن: ج د = ع ل



الحل

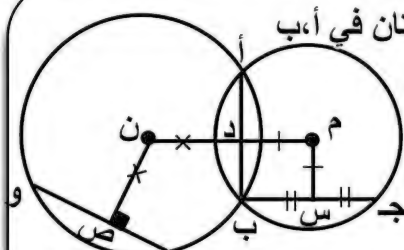
م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ، ب

س منتصف ج ب

$$م = س = م د$$

$$ن = ص = ن د$$

ن ص \perp هـ و اثبت أن: ج ب = و هـ



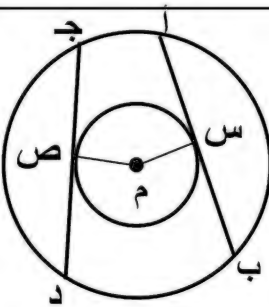
الحل

٤

دائرتان متحدتا المركز م

أ ب ، ج د مماسان للصغرى

اثبت أن: أ ب = ج د



الحل

تعيين الدائرة إذا علم : ١- مركزها ٢- طول نصف قطرها

رسم دائرة تمر بنقطة

♦ يمكن رسم عدد لا نهائي من الدوائر تمر بنقطة واحدة.

رسم دائرة تمر بنقطتين

♦ يمكن رسم عدد لا نهائي من الدوائر تمر بنقطتين.

♦ ولكن إذا علم طول القطعة المستقيمة أ ب وطول نصف قطر المطلوبة فإن:

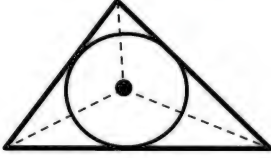

- إذا كان $نق < \frac{1}{2} أ ب$ فإنه يمكن رسم دائرتان فقط.
- إذا كان $نق = \frac{1}{2} أ ب$ فإنه يمكن رسم دائرة واحدة فقط وهي أصغر دائرة.
- إذا كان $نق > \frac{1}{2} أ ب$ فإنه لا يمكن رسم أي دائرة.

مثال: إذا كانت أ ب قطعة مستقيمة طولها ٧ سم فإن أصغر دائرة يمكن أن تمر بالنقطتين أ ، ب طول نصف قطرها

رسم دائرة تمر بثلاث نقاط

♦ أي ثلاث نقاط على استقامة واحدة لا يمكن أن تمر بها دائرة.

♦ أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة وحيدة.

الدائرة الداخلة للمثلث	الدائرة الخارجة للمثلث
 <p>مركزها هو نقطة تقاطع منصفات زواياها الداخلة</p>	 <p>مركزها هو نقطة تقاطع الأعمدة المقامة على أضلاع المثلث من منتصفاتها (محاور تماثل أضلاعه)</p>

♦ يمكن رسم دائرة تمر برؤوس كل من : المستطيل - المربع - شبه المنحرف المتساوي الساقين

♦ لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس : متوازي الأضلاع - المعين - شبه المنحرف غير المتساوي الساقين

تدريب :

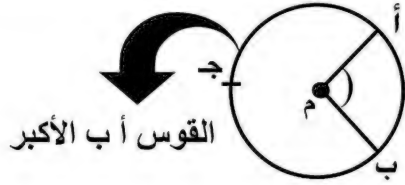
- ١) ارسم القطعة أ ب = ٤ سم ثم ارسم دائرة طول نصف قطرها ٤ سم تمر بالنقطتين أ ، ب
- ٢) ارسم Δ أ ب ج المتساوي الأضلاع طول ضلعه ٤ سم ثم ارسم دائرة تمر برؤوسه ثم حدد موضع الدائرة بالنسبة لارتفاعاته.

الزاوية المركزية وقياس الأقواس

الصفحة
الخامسة

هي زاوية رأسها مركز الدائرة ويحمل ضلعيها أنصاف أقطار

الزاوية المركزية

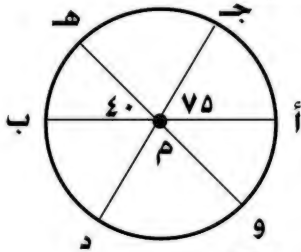


- أ م ب زاوية مركزية
- القوس المقابل لها هو القوس أ ب
- القوس أ ج ب يسمى أ ب الأكبر

قياس القوس يساوى قياس الزاوية المركزية المقابلة له

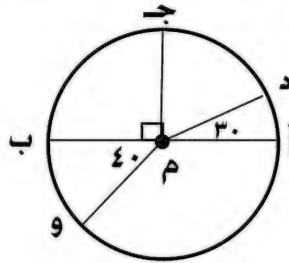
قياس القوس

تدريب



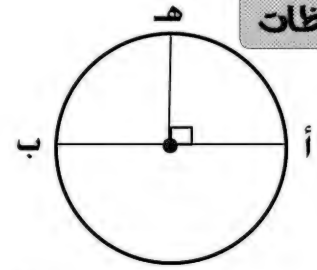
- ق (أ ج) =
ق (ج هـ) =
ق (أ ج د) =
ق (أ و هـ) =

مثال



- ق (أ د) = 30°
ق (ج ب) = 90°
ق (د ج) = 30° - 90° = 60°
ق (د ج ب) = 90° + 60° = 150°
ق (أ ب و) = 40° + 180° = 220°

ملاحظات



- ◆ قياس الدائرة كلها = 360°
- ◆ قياس نصف الدائرة = 180°
- ◆ قياس ربع الدائرة = 90°
- ◆ قياس خمس الدائرة = $\frac{360}{5} = 72°$

$$\text{طول القوس} = \frac{\text{قياس القوس}}{360} \times 2\pi \text{ نق}$$

طول القوس

تدريب

أوجد قياس القوس الذى يمثل $\frac{1}{3}$ الدائرة .
ثم احسب طول هذا القوس إذا كان طول نصف
قطر الدائرة ٧ سم .

الحل

مثال

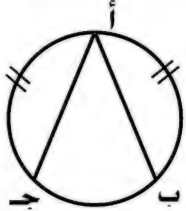
أوجد قياس القوس الذى يمثل $\frac{1}{3}$ الدائرة .
ثم احسب طول هذا القوس إذا كان طول نصف
قطر الدائرة ٧ سم .

الحل

$$\begin{aligned} \text{قياس القوس الذى يمثل } \frac{1}{3} \text{ الدائرة} &= \frac{360}{3} = 120^\circ \\ \text{طول القوس} &= \frac{\text{قياس القوس}}{360} \times 2\pi \text{ نق} \\ &= \frac{120}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 7 = 14.6 \text{ سم} \end{aligned}$$

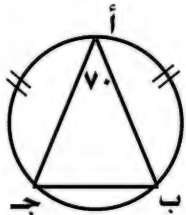
نتائج هامة

**إذا كانت الأقواس متساوية
فإن أوتارها تكون متساوية**



إذا كان ق (أ ب) = ق (أ ج)
فإن : أ ب = أ ج

مثال



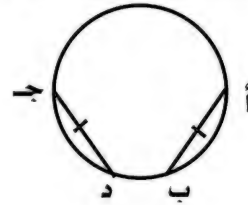
ق (أ ب) = ق (أ ج)
ق (أ) = ق (أ)
فأوجد ق (ب)

الحل

∴ ق (أ ب) = ق (أ ج) أقواس متساوية
∴ أ ب = أ ج أوتار متساوية

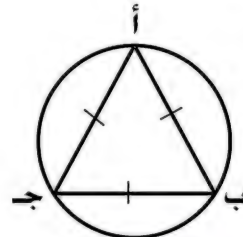
$$\therefore \text{ق (ب)} = \text{ق (ج)} = \frac{180 - 70}{2} = \frac{110}{2} = 55^\circ$$

**إذا كانت الأوتار متساوية
فإن أقواسها تكون متساوية**



إذا كان أ ب = ج د
فإن : ق (أ ب) = ق (ج د)

مثال



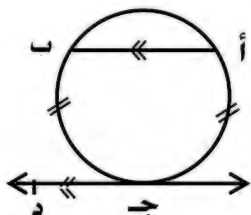
أ ب ج د متساوي الأضلاع
أوجد ق (أ ب)

الحل

∴ أ ب = ج د = أ ج أوتار متساوية
∴ ق (أ ب) = ق (ج د) = ق (أ ج) أقواس متساوية

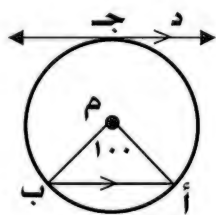
$$\therefore \text{ق (أ ب)} = \frac{360}{3} = 120^\circ$$

**الوتر والمماس المتوازيان
يحصران قوسان متساويان**



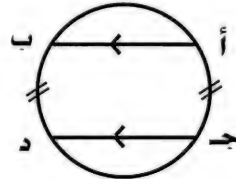
إذا كان أ ب // ج د
فإن ق (أ ج) = ق (ب د)

تدريب



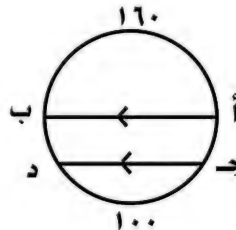
إذا كان أ ب // ج د
ق (أ م ب) = 100°
فإن ق (أ ج) =

**الوتران المتوازيان
يحصران قوسان متساويان**



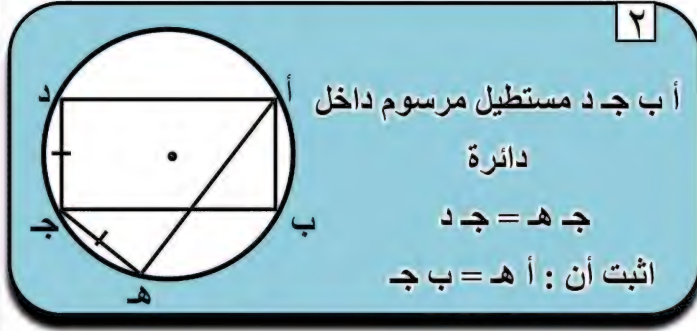
إذا كان أ ب // ج د
فإن ق (أ ج) = ق (ب د)

تدريب



إذا كان أ ب // ج د
ق (أ ب) = 160°
ق (ج د) = 100°
فإن ق (أ ج) =

في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة الأقواس المتساوية في الطول متساوية في القياس



الحل

∴ أ ب = ج د خواص المستطيل

ه ج = د ج (معطى)

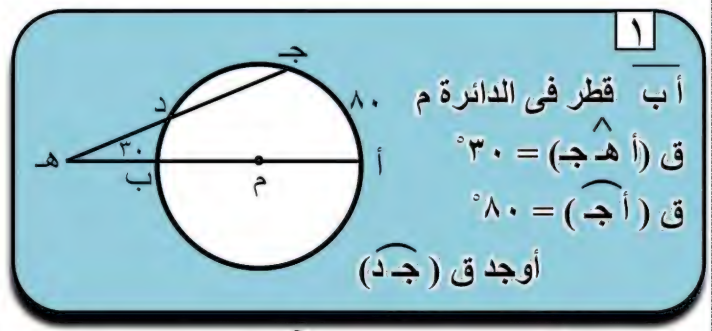
∴ أ ب = ه ج

∴ ق (أ ب) = ق (ه ج)

بإضافة ق (ب ه) للطرفين

∴ ق (أ ه) = ق (ب ج)

∴ أ ه = ب ج ه ط



الحل

العمل :

نرسم م ج ، م د

∴ ق (أ ج د) = 80° ∴ ق (أ م ج) = 80°

∴ أ م ج زاوية خارجة عن ∆ ج م ه

∴ ق (م ج ه) = 80° - 30° = 50°

فى ∆ ج م د : ∴ م ج = م د (أنصاف أقطار)

∴ ق (ج م د) = 180° - (50° + 50°) = 80°

∴ ق (ج د) = 80°



الحل

العمل : نرسم م أ ، م ه

∴ أ ب ج د ه خماسى منتظم

∴ أ ب = ب ج = ج د = د ه = أ ه

∴ ق (أ ب) = ق (ب ج) = ق (ج د) = ق (د ه) = ق (أ ه)

∴ قياس الدائرة = 360° ∴ ق (أ ه) = 360° / 5 = 72° أولاً

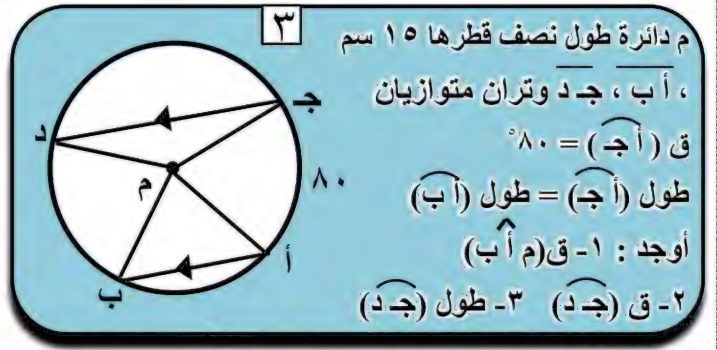
∴ ق (أ ه) = 72° ∴ ق (أ م ه) = 72°

∴ أ س مماس ∴ ق (م أ س) = 90°

∴ ه س مماس ∴ ق (م ه س) = 90°

فى الشكل الرباعى م أ س ه :

ق (أ س ه) = 360° - (90° + 90° + 72°) = 108°



الحل

∴ طول (أ ج د) = طول (أ ب)

∴ ق (أ ج د) = ق (أ ب) = 80°

∴ ق (أ م ب) المركزية = 80°

∴ م أ = م ب (أنصاف أقطار) ∴ ∆ م أ ب متساوى الساقين

∴ ق (م أ ب) = ق (م ب أ) = 50° المطلوب الأول

∴ أ ب // ج د ∴ ق (أ ج د) = ق (ب د) = 80°

∴ ق (ج د) + ق (أ ج د) + ق (أ ب) + ق (ب د) = 360°

∴ ق (ج د) = 360° - (80° + 80° + 80°) = 120°

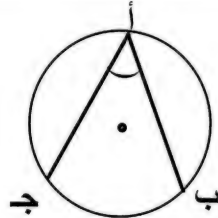
طول ج د = 120° / 360° × 2 × 3.14 × 15 = 31.4 سم

العلاقة بين المحيطية والمركزية



هي زاوية رأسها على الدائرة ويحمل ضلعيها وتران

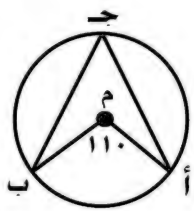
الزاوية المحيطية



- ب أ ج زاوية محيطية
- القوس المقابل لها هو $\widehat{ب ج}$

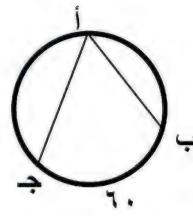
قياس الزاوية المحيطية = نصف قياس
المركزية المشتركة معها في القوس

قياس الزاوية المحيطية = نصف
قياس القوس المقابل لها



د أ ج ب المحيطية ، د أ م ب المركزية
مشتريكتان في $\widehat{أ ب}$

$$\therefore ق (أ ج ب) = \frac{1}{2} ق (أ م ب)$$

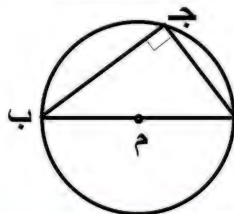


ق (ب أ ج) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق (ب ج)

فإذا كان ق (ب ج) = 60

فإن ق (ب أ ج) = 30

الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة

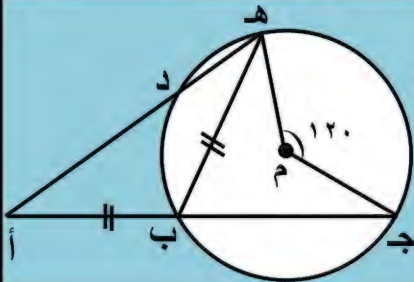


∴ $\overline{أ ب}$ قطر

∴ ق (ج) المحيطية = 90°

لأنها محيطية القوس المقابل لها نصف دائرة أ

مثال ٢



ق (هـ م ج) = 120°

أ ب = ب هـ

أوجد: ق (د أ ج)

الحل

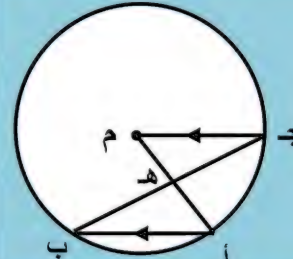
∴ ق (هـ ب ج) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق (م) المركزية

لأنهما مشتركتان في $\widehat{أ ج}$ ∴ ق (هـ ب ج) = 60°

∴ أ ب = ب هـ

∴ ق (ب هـ أ) = ق (هـ أ ب) = $\frac{60}{2}$ = 30°

مثال ١



أ ب وتر في الدائرة م

ج م // أ ب

اثبت أن: ب هـ < أ هـ

الحل

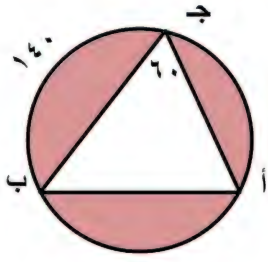
∴ ق (م) = 2 ق (ب)

مركزية ومحيطية مشتركتان في $\widehat{أ ج}$

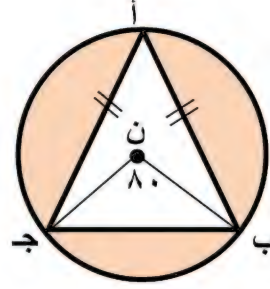
∴ ج م // أ ب ∴ ق (م) = ق (أ) بالتبادل

في $\triangle أ هـ ب$: ∴ ق (أ) = 2 ق (ب)

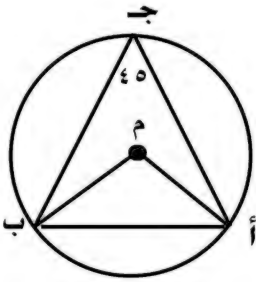
∴ ق (أ) < ق (ب) ∴ ب هـ < أ هـ



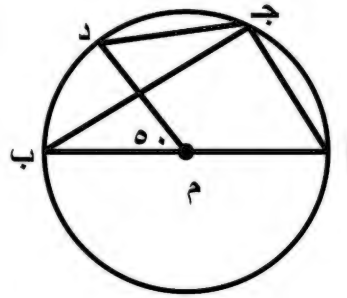
٢ ق (ج) = 60°
ق (ج ب) = 140°
أوجد ق (أ ج)



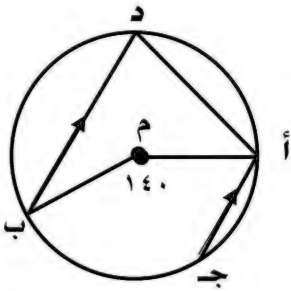
١ أ ب = أ ج ،
ق (ب ن ج) = 80°
أوجد: (١) ق (أ ب ج)
(٢) ق (ب ج) الأكبر



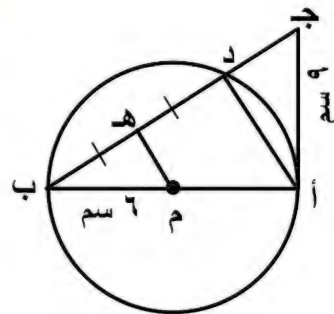
٤ ق (ج) = 45°
أوجد ق (م أ ب)



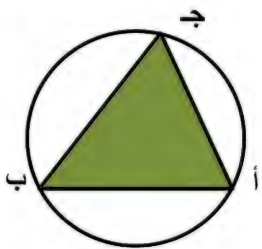
٣ أ ب قطر في الدائرة م
ق (د م ب) = 50°
أوجد ق (أ ج د)



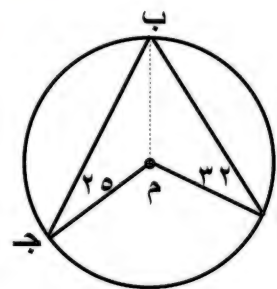
٦ أ ج // د ب
ق (أ م ب) = 140°
أوجد ق (ج أ د)



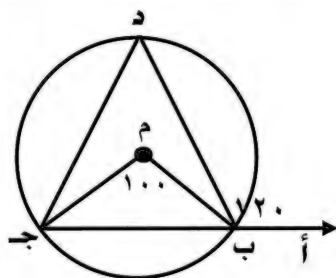
٥ أ ب قطر ، أ ج مماس
هـ منتصف د ب
م ب = ٦ سم ، أ ج = ٩ سم
أوجد طول كل من :
ب ج ، أ د ، م هـ



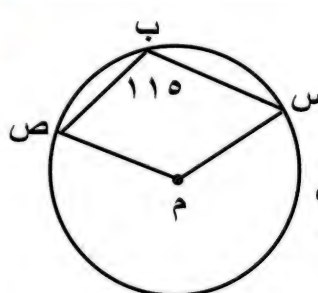
٨ ق (أ ب) : ق (ب ج) : ق (أ ج) =
٣ : ٥ : ٤ =
أوجد: ق (أ ج ب)



٧ ق (أ) = 32°
ق (ج) = 25°
أوجد : ق (أ م ج)

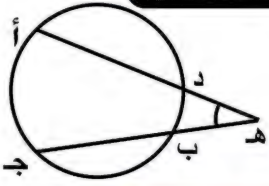


١٠ ق (ب م ج) = 100°
ق (أ ب د) = 120°
أوجد ق (د ج ب)



٩ ق (ب) = 115°
أوجد : ق (س م ص)
عد بالك : ب محيطية تشترك معها في
القوس زاوية مركزية وهي م المنعكسة

تمرين مشهور ٢



لو تقاطع وتران خارج دائرة

قياس زاوية التقاطع = نصف الطرح

$$\widehat{C} = \frac{1}{2} [\widehat{A} - \widehat{B}]$$

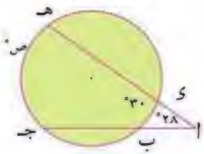
قياس القوس الأكبر = ضعف الزاوية + الأصغر

$$\widehat{A} = 2\widehat{C} + \widehat{B}$$

قياس القوس الأصغر = الأكبر - ضعف الزاوية

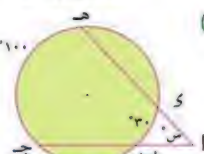
$$\widehat{B} = \widehat{A} - 2\widehat{C}$$

تدريب 4



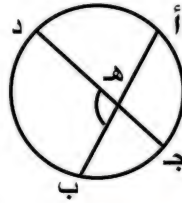
أوجد قيمة ص

تدريب 3



أوجد قيمة س

تمرين مشهور ١



لو تقاطع وتران داخل دائرة

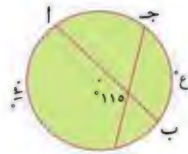
قياس زاوية التقاطع = نصف المجموع

$$\widehat{A} = \frac{1}{2} [\widehat{B} + \widehat{C}]$$

قياس القوس المجهول = ضعف الزاوية - المعلوم

$$\widehat{B} = 2\widehat{A} - \widehat{C}$$

تدريب 2



أوجد قيمة ع

تدريب 1



أوجد قيمة س

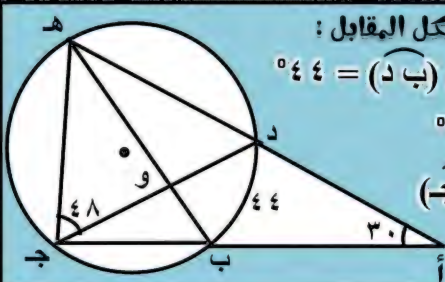
مثال ٢

في الشكل المقابل :

$$\widehat{A} = 30^\circ, \widehat{B} = 44^\circ$$

$$\widehat{C} = 48^\circ$$

أوجد : ١- \widehat{A} - ٢- \widehat{B}



من تمرين مشهور ٢ :

$$\widehat{C} = 2\widehat{A} + \widehat{B}$$

$$\widehat{C} = 2 \times 30 + 44 = 104^\circ$$

$$\widehat{C} = 48^\circ$$

$$\widehat{B} = 2 \times 48 = 96^\circ$$

$$\widehat{A} = 360^\circ$$

$$\widehat{B} = 360^\circ - (96^\circ + 104^\circ + 44^\circ) = 116^\circ$$

الحل

الحل

من تمرين مشهور ١ :

$$\widehat{B} = 2\widehat{A} - \widehat{C}$$

$$120 = 110 - 110 \times 2 =$$

$$\widehat{B} = 120^\circ$$

$$\widehat{B} = \frac{120}{2} = 60^\circ$$

نوريات على نورين وشهيرة ١ ، ٢

٢ في الشكل المقابل :

ق (أ) = 40°
 ق (ب ج) = ق (د هـ)
 أوجد : ١) ق (ج هـ)
 ٢) ق (ب ج)

الحل

١ في الشكل المقابل :

ق (أ) = 35°
 ق (أ هـ د) = 115°
 أوجد : ق (أ د)

الحل

٤ في الشكل المقابل :

ق (أ) = 40°
 ق (ب ج د) = 26°
 أوجد : ١) ق (ج هـ)
 ٢) ق (هـ س ج)

الحل

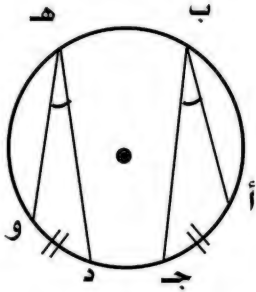
٣ في الشكل المقابل :

ق (ب و د) = 55°
 ق (أ ج) = 150°
 أوجد : ١) ق (ب د)
 ٢) ق (أ) ، ق (هـ)

الحل

الزوايا المحيطية المشتركة في القوس

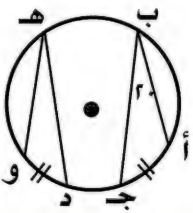
الزوايا المحيطية التي أقواسها
متساوية تكون متساوية في القياس



$$\begin{aligned} \therefore \text{ق}(\widehat{أج}) &= \text{ق}(\widehat{دو}) \\ \therefore \text{ق}(\widehat{ب}) &= \text{ق}(\widehat{هـ}) \\ &(\text{والعكس صحيح}) \end{aligned}$$

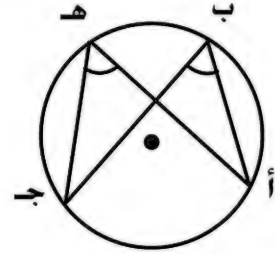
نص
معلم اول رياضيات

فهذا : في الشكل المقابل :



$$\begin{aligned} \therefore \text{ق}(\widehat{أبج}) &= 20^\circ \\ \therefore \text{ق}(\widehat{دهو}) &= \dots\dots\dots \\ &\text{السبب:} \dots\dots\dots \end{aligned}$$

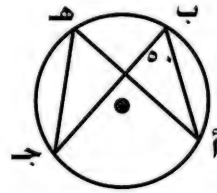
الزوايا المحيطية المشتركة في نفس
القوس متساوية في القياس



$$\begin{aligned} \text{ق}(\widehat{ب}) &= \text{ق}(\widehat{هـ}) \\ &\text{محيطيتان مشتركتان في القوس أ ج} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{كذلك: } \text{ق}(\widehat{أ}) &= \text{ق}(\widehat{ج}) \\ &\text{محيطيتان مشتركتان في القوس ب هـ} \end{aligned}$$

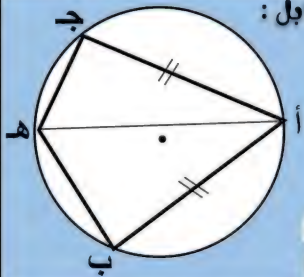
فهذا : في الشكل المقابل :



$$\begin{aligned} \therefore \text{ق}(\widehat{أبج}) &= 50^\circ \\ \therefore \text{ق}(\widehat{أهـج}) &= \dots\dots\dots \\ &\text{السبب:} \dots\dots\dots \end{aligned}$$

مثال ٢

في الشكل المقابل :



$$\begin{aligned} \text{أ ب} &= \text{أ ج} \\ \text{هـ} &\supset \text{ب ج} \\ &\text{اثبت أن:} \end{aligned}$$

$$\text{ق}(\widehat{أهـب}) = \text{ق}(\widehat{أهـج})$$

الحل

$$\therefore \text{أ ب} = \text{أ ج} \quad \text{أوتار متساوية}$$

$$\therefore \text{ق}(\widehat{أب}) = \text{ق}(\widehat{أج}) \quad \text{أقواس متساوية}$$

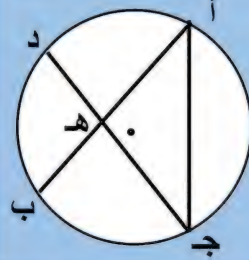
$$\therefore \text{ق}(\widehat{أهـب}) = \text{ق}(\widehat{أهـج})$$

هـ ط ث

القاعد الأولى: إذا كانت الأوتار متساوية فإن الأقواس متساوية
القاعدة الثانية: إذا كانت الأقواس متساوية فإن الزوايا المحيطية
المرسومة عليها متساوية

مثال ١

في الشكل المقابل :



أ ب ، ج د وتران متساويان
في الطول
اثبت أن :
 Δ أ ج د متساوي الساقين

الحل

$$\therefore \text{أ ب} = \text{ج د} \quad \therefore \text{ق}(\widehat{أب}) = \text{ق}(\widehat{ج د})$$

ب طرح ق (د ب) من الطرفين

$$\therefore \text{ق}(\widehat{أ د}) = \text{ق}(\widehat{ب ج})$$

$$\therefore \text{ق}(\widehat{ج}) = \text{ق}(\widehat{أ})$$

$$\therefore \Delta \text{ أ ج د متساوي الساقين}$$

٢ في الشكل المقابل :
أ ب ج مثلث متساوي الأضلاع
مرسوم داخل دائرة
أ د = د هـ
اثبت أن :
 Δ أ د هـ متساوي الأضلاع

الحل

١ في الشكل المقابل :
أ ب ج مثلث مرسوم
داخل دائرة
د هـ // ب ج
اثبت أن :
ق (د أ ج) = ق (ب أ هـ)

الحل

Δ أ ب ج متساوي الأضلاع

$$\therefore \text{ق}(\hat{ب}) = 60^\circ$$

$$\therefore \text{ق}(\hat{د}) = \text{ق}(\hat{ب}) = 60^\circ \text{ محيطتان مشتركتان في أ ج}$$

Δ أ د هـ متساوي الساقين

$$\therefore \text{ق}(\hat{د أ هـ}) = \text{ق}(\hat{د هـ أ}) = 60^\circ$$

Δ أ د هـ متساوي الأضلاع

هـ ط ث

$$\therefore \text{د هـ} // \text{ب ج} \therefore \text{ق}(\hat{د ب}) = \text{ق}(\hat{هـ ج})$$

$$\therefore \text{ق}(\hat{د أ ب}) \text{ المحيطية} = \text{ق}(\hat{هـ أ ج}) \text{ المحيطية}$$

لأنهما محيطتان أقواسهما متساوية

وبإضافة ق (ب أ ج) للطرفين

$$\therefore \text{ق}(\hat{د أ ج}) = \text{ق}(\hat{ب أ هـ}) \text{ هـ ط ث}$$

٤ في الشكل المقابل :
أ د ، ب هـ وتران متساويان في
الطول في الدائرة
أ د \cap ب هـ = هـ
اثبت أن : ج د = ج هـ

٣ في الشكل المقابل :
أ ب \cap ج د = هـ
هـ أ = هـ د
اثبت أن : هـ ب = هـ ج

$$\therefore \text{أ د} = \text{ب هـ} \therefore \text{ق}(\hat{أ د}) = \text{ق}(\hat{ب هـ})$$

وبإضافة ق (د هـ) للطرفين

$$\therefore \text{ق}(\hat{أ هـ}) = \text{ق}(\hat{ب د})$$

$$\therefore \text{ق}(\hat{ب}) = \text{ق}(\hat{أ}) \therefore \text{ج أ} = \text{ج ب}$$

في Δ ج أ ب :

$$\therefore \text{ج أ} = \text{ج ب} , \text{د أ} = \text{هـ ب}$$

بالطرح ينتج أن : ج د = ج هـ

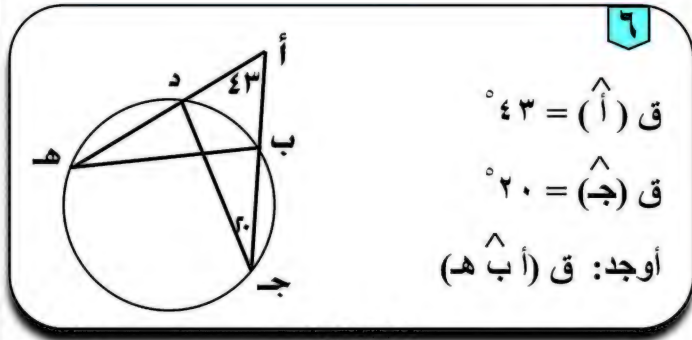
$$\therefore \text{هـ أ} = \text{هـ د} \therefore \text{ق}(\hat{أ}) = \text{ق}(\hat{د})$$

$$\therefore \text{ق}(\hat{أ}) = \text{ق}(\hat{ج}) \text{ محيطتان مشتركتان في د ب}$$

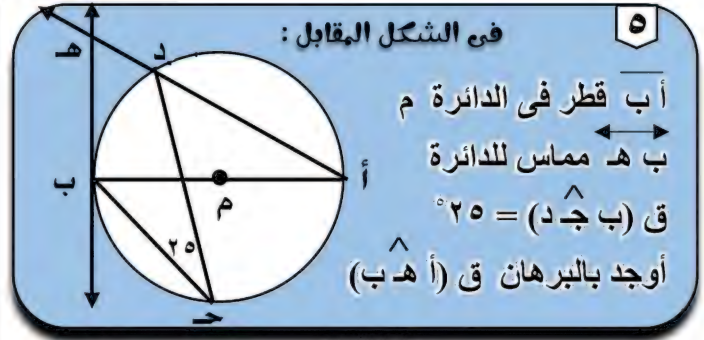
$$\therefore \text{ق}(\hat{د}) = \text{ق}(\hat{ب}) \text{ محيطتان مشتركتان في أ ج}$$

$$\therefore \text{ق}(\hat{ج}) = \text{ق}(\hat{ب})$$

Δ هـ ج ب متساوي الساقين $\therefore \text{هـ ب} = \text{هـ ج}$



الحل



الحل

∴ ب هـ مماس ، أ ب قطر

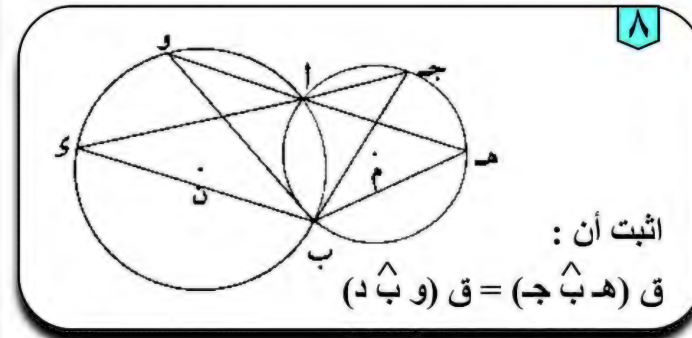
$$\therefore \text{ق (هـ ب أ)} = 90^\circ$$

∴ ق (أ) = ق (ب ج د) محيطيتان مشتركتان في د ب

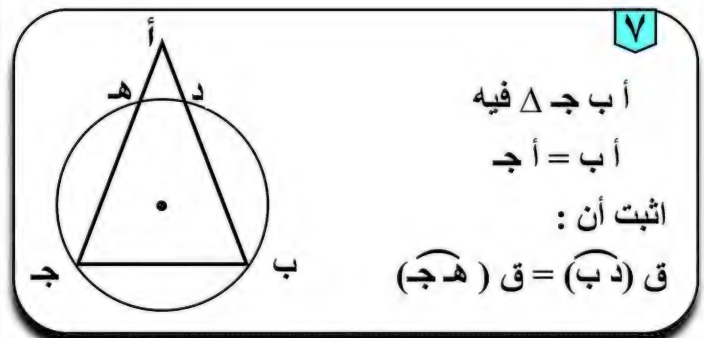
$$\therefore \text{ق (أ)} = 25^\circ$$

في $\triangle \text{هـ ب أ}$:

$$\text{ق (أ هـ ب)} = 180^\circ - (25^\circ + 90^\circ) = 65^\circ$$



الحل



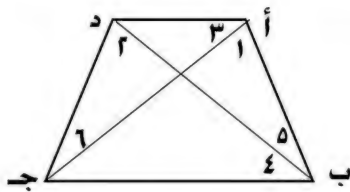
الحل

الشكل الرباعي الدائري : هو شكل رباعي تنتمي رؤوسه الأربعة إلى دائرة واحدة .

أي يمكن رسم دائرة واحدة تمر برؤوسه الأربعة

لو عرفت ان الشكل رباعي دائري (سواء هو قالك في المسألة أو لقيت رؤوسه الأربعة تقع على الدائرة) استنتج ٣ حاجات :

أي زاويتان مرسومتان على قاعدة
واحدة وفي جهة واحدة منها
متساويتان



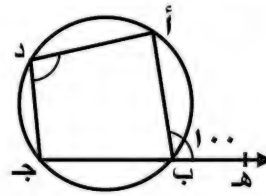
إذا كان أ ب ج د رباعي دائري فإن:

$$\angle 1 = \angle 2 \quad \text{ق (1) = ق (2) مرسومتان على ب ج}$$

$$\angle 3 = \angle 4 \quad \text{ق (3) = ق (4) مرسومتان على د ج}$$

$$\angle 5 = \angle 6 \quad \text{ق (5) = ق (6) مرسومتان على أ د}$$

قياس الزاوية الخارجة =
قياس المقابلة للمجاورة

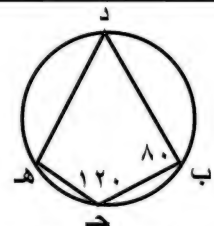


∴ الشكل أ ب ج د رباعي دائري

$$\angle \text{ق (أ ب هـ) الخارجة} = \angle \text{ق (د)}$$

$$\angle \text{ق (د)} = 100^\circ$$

كل زاويتان متقابلتان
مجموعهما = ١٨٠°



∴ الشكل أ ب ج د رباعي دائري

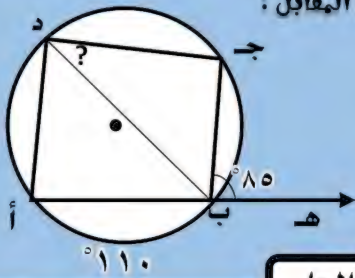
$$\angle \text{ق (ب)} + \angle \text{ق (د)} = 180^\circ$$

$$\angle \text{ق (د)} + \angle \text{ق (ج)} = 180^\circ$$

$$\angle \text{ق (د)} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\angle \text{ق (هـ)} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

مثال ٢ في الشكل المقابل :



هـ ∩ أ ب

$$\angle \text{ق (أ ب)} = 110^\circ$$

$$\angle \text{ق (ج ب هـ)} = 85^\circ$$

أوجد ق (ب د ج)

الحل

$$\angle \text{ق (أ ب)} = 110^\circ$$

$$\angle \text{ق (ب د أ) المحيطية} = \frac{1}{2} \angle \text{ق (أ ب)} = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ$$

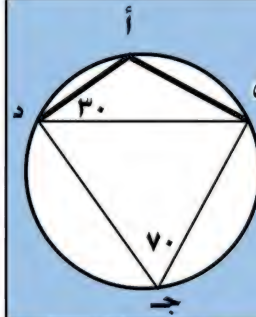
∴ ج ب هـ خارجة عن الرباعي الدائري أ ب ج د

$$\angle \text{ق (ج د أ)} = \angle \text{ق (ج ب هـ)} = 85^\circ$$

$$\angle \text{ق (ب د ج)} = \angle \text{ق (ج د أ)} - \angle \text{ق (ب د أ)}$$

$$= 85^\circ - 55^\circ = 30^\circ$$

مثال ١ في الشكل المقابل :



أ ب ج د شكل رباعي مرسوم داخل

دائرة ، ق (ج د) = 70° ،

$$\angle \text{ق (أ د ب)} = 30^\circ$$

أوجد : ق (أ ب د)

الحل

∴ أ ب ج د رباعي دائري

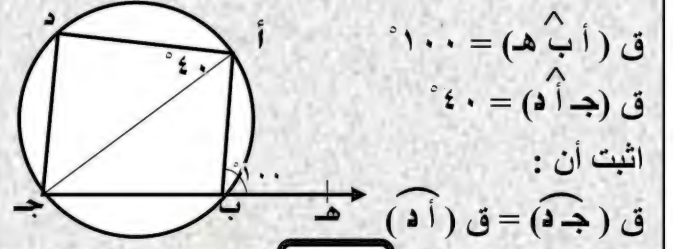
$$\angle \text{ق (أ)} + \angle \text{ق (ج)} = 180^\circ$$

$$\angle \text{ق (أ)} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

في Δ أ ب د :

$$\angle \text{ق (أ ب د)} = 180^\circ - (30^\circ + 110^\circ) = 40^\circ$$

٣ في الشكل المقابل :



الحل

∴ \widehat{ABH} زاوية خارجة عن الرباعي الدائري ABCD
 ∴ $\widehat{CD} = \widehat{ABH} = 100^\circ$

في $\triangle ADH$:

$$\widehat{ADH} = 180^\circ - (100^\circ + 40^\circ) = 40^\circ$$

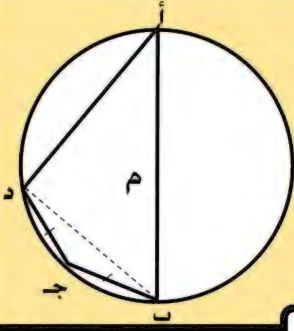
$$\therefore \widehat{ADH} = \widehat{BCD} = 40^\circ$$

$$\therefore \widehat{AD} = \widehat{DH}$$

$$\therefore \widehat{CD} = \widehat{AD}$$

هـ ط ث

٤ في الشكل المقابل :



الحل

العمل نرسم ب د

∴ الشكل ABCD رباعي دائري

$$\therefore \widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$$

$$\therefore \widehat{C} = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

المطلوب الأول

في $\triangle BCD$:

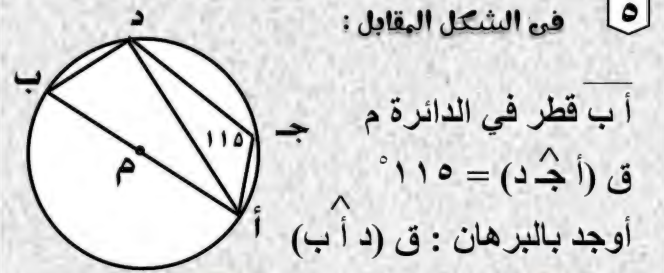
$$\therefore \widehat{B} = \widehat{C} = 40^\circ$$

$$\therefore \widehat{B} = \frac{180^\circ - 140^\circ}{2} = 20^\circ$$

$$\therefore \widehat{B} = 90^\circ$$

$$\therefore \widehat{D} = 90^\circ + 20^\circ = 110^\circ$$

٥ في الشكل المقابل :

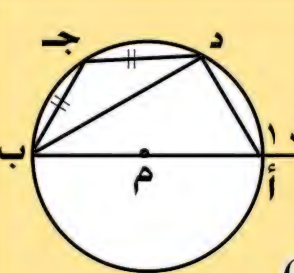


أ ب قطر في الدائرة م

$$\widehat{ACD} = 115^\circ$$

أوجد بالبرهان : \widehat{DAB}

٦ في الشكل المقابل :



أ ب قطر في الدائرة م

$$\widehat{ADH} = 100^\circ$$

$$\widehat{B} = \widehat{C}$$

أوجد بالخطوات : \widehat{ADH}

إثبات أن الشكل رباعي دائري

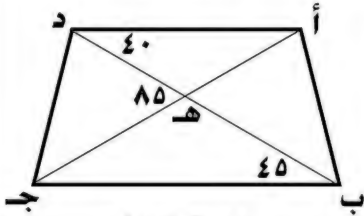


لوقالك اثبت أن الشكل رباعي دائري إبحث عن إحدى الحالات الثلاثة الآتية واثبتها:

زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة ومتساويتان

مثال لذيد

في الشكل المقابل عايزين نثبت
أن : أ ب ج د رباعي دائري



طريقة الحل

شايف الزاوية ٨٥ ؟

دى خارجة عن \triangle ه ب ج

$\therefore \angle (\text{ه ب ج}) = 85 - 45 = 40^\circ$

كده ظهر لنا زاويتين متساويتين

ومرسومتين على قاعدة واحدة

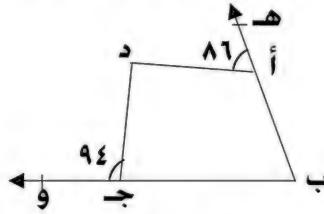
وهما $\angle (\text{أ د ب}) = \angle (\text{أ ج ب})$

\therefore الشكل رباعي دائري

زاوية خارجة قياسها = قياس المقابلة للمجاورة

مثال لذيد

في الشكل المقابل عايزين نثبت
أن : أ ب ج د رباعي دائري



طريقة الحل

شايف الزاوية ٩٤ ؟

هي واللى جنبها زاوية مستقيمة

$\therefore \angle (\text{د ج ب}) = 180 - 94 = 86^\circ$

كده ظهر لنا زاويتين متساويتين

الخارجة = المقابلة للمجاورة

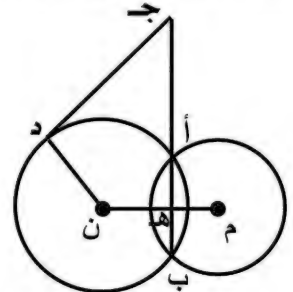
وهما $\angle (\text{ه أ د}) = \angle (\text{د ج ب})$

\therefore الشكل رباعي دائري

زاويتان متقابلتان
واثبت أن :
مجموعهما = ١٨٠

مثال لذيد

في الشكل المقابل عايزين نثبت
أن : ج ه ن د رباعي دائري



طريقة الحل

في الشكل ج ه ن د

$\angle (\text{د}) = 90^\circ$ عشان المماس

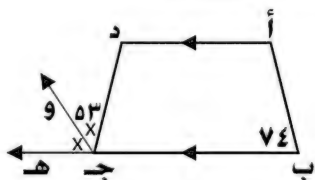
$\angle (\text{ه}) = 90^\circ$ عشان الوتر المشترك

و الزاويتين د ، ه متقابلتين

ولو جمعناهم = ١٨٠

\therefore الشكل رباعي دائري

حاول بنفسك



في الشكل المقابل :

$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

ج وينصف د ج ه

$\angle (\text{د ج و}) = 53^\circ$

$\angle (\text{ب}) = 74^\circ$

اثبت أن : أ ب ج د رباعي دائري

سؤال مهم :

اذكر ٣ حالات يكون فيها الشكل الرباعي دائرياً ؟

الإجابة :

- ١- إذا وجد زاويتان متقابلتان متكاملتان
- ٢- إذا وجد زاوية خارجة قياسها = المقابلة للمجاورة
- ٣- إذا وجد زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها ومتساويتان

١ في الشكل المقابل :
أ ب قطر في الدائرة م
س منتصف أ ج ، ب ص مماس
اثبت أن :
الشكل أ س ب ص رباعي دائري

الحل

∴ س منتصف أ ج ∴ م س ⊥ أ ج
∴ ق (أ س م) = ٩٠°
∴ ب ص مماس ، أ ب قطر ∴ أ ب ⊥ ب ص
∴ ق (م ب ص) = ٩٠°
من ١ ، ٢ ينتج أن :
ق (أ س ص) = ق (أ ب ص)
وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وهي أ ص
وفي جهة واحدة منها
∴ أ س ب ص رباعي دائري

٢ في الشكل المقابل :
أ ب قطر في الدائرة
د ه ⊥ أ ب
اثبت أن :
أ ج د ه رباعي دائري

الحل

∴ د ه ⊥ أ د ∴ ق (أ د ه) = ٩٠°
∴ أ ج ب محيطية مرسومة في نصف دائرة
∴ ق (أ ج ب) = ٩٠°
من ١ ، ٢ نلاحظ : ق (أ د ه) = ق (أ ج ب)
وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وهي أ ه
وفي جهة واحدة منها
∴ الشكل أ ج د ه رباعي دائري



٣ في الشكل المقابل :
ج د قطر ⊥ أ ب
اثبت أن :
١ - س ص ه ج رباعي دائري
٢ - ق (د ص ب) = ق (د ب س)

الحل

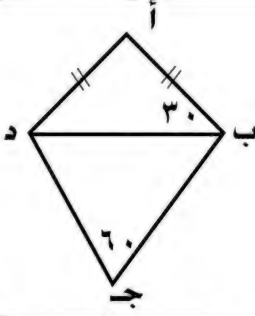
∴ ج د ⊥ أ ب ∴ ق (ج د ه ص) = ٩٠°
∴ ق (ج س د) = ٩٠° محيطية مرسومة في نصف دائرة
∴ ق (ج د ه ص) + ق (ج س د) = ١٨٠° (متقابلتان متكاملتان)
∴ س ص ه ج رباعي دائري
المطلوب الاول
∴ ق (د ص ب) = ق (ج د ه ص)
لأن قياس الزاوية الخارجة = قياس المقابلة للمجاورة
∴ ق (د ب س) = ق (ج د ه ص)
لأنهما محيطيتان مشتركتان في س د
من ١ ، ٢ ينتج أن : ق (د ص ب) = ق (د ب س)

٤ في الشكل المقابل :
أ ب = أ ج ،
ب س ينصف ب
ج ص ينصف ج
١ - اثبت أن :
ب ج س ص رباعي دائري
٢ - اثبت أن : ص س // ب ج

الحل

∴ أ ب = أ ج ∴ ق (ب) = ق (ج)
∴ ١/٢ ق (ب) = ١/٢ ق (ج)
∴ ق (ص ب س) = ق (ص ج س)
وهما مرسومتان على قاعدة واحدة
∴ ب ج س ص رباعي دائري
المطلوب الاول
∴ ب ج س ص رباعي دائري
∴ ق (أ ص س) الخارجة = ق (ج د ه ص) المقابلة للمجاورة
∴ ق (أ ص س) = ق (ب) وهما في وضع تناظر
∴ ص س // ب ج

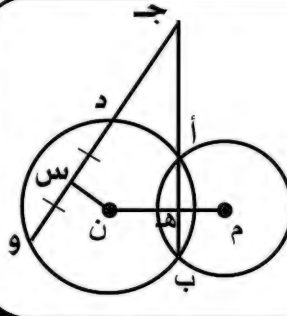
٢



أ ب = أ د
ق (أ ب د) = ٣٠°
ق (ج د) = ٦٠°
اثبت أن : الشكل
أ ب ج د رباعي دائري

الحل

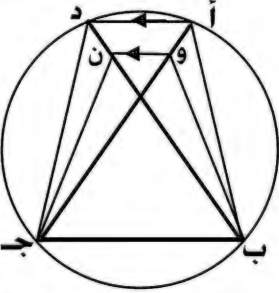
١



م ، دائرتان متقاطعتان
س منتصف د و
اثبت أن : الشكل
ج ه ن س رباعي دائري

الحل

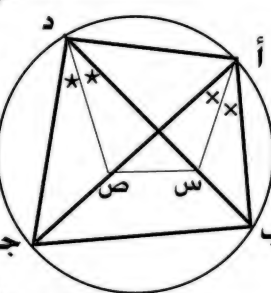
٤



أ د // و ن
اثبت أن :
(١) ب و ن ج رباعي دائري
(٢) ق (و ب ن) = ق (و ج ن)

الحل

٣



أ س ينصف د ب أ ج
د ص ينصف د ب د ج
اثبت أن : الشكل
(١) أ س ص د رباعي دائري
(٢) س ص // ب ج

الحل

١ في الشكل المقابل :

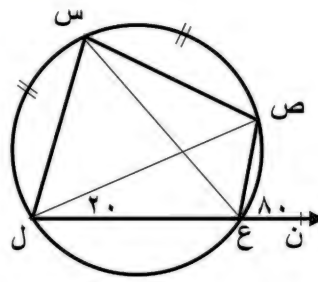
س منتصف ص ل

ق (ص ع ن) = ٨٠

ق (ص ل ع) = ٢٠

أوجد : (١) ق (ع س ل)

(٢) ق (س ص ع)



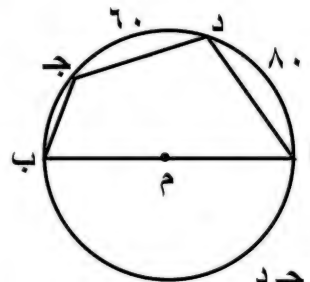
٣ في الشكل المقابل :

أ ب قطر في الدائرة م

ق (أ د) = ٨٠

ق (د ج) = ٦٠

أوجد قياسات زوايا الشكل أ ب ج د



٢ في الشكل المقابل :

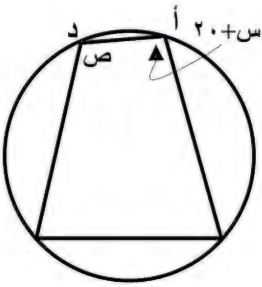
ق (ب) = ٧٠

ق (ج) = ٨٠

ق (د) = ص

ق (أ) = س + ٢٠

أوجد قيمتي س ، ص



٤ في الشكل المقابل :

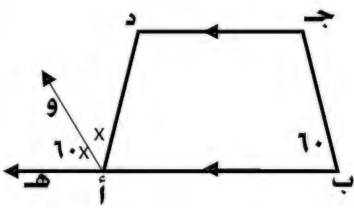
ج د // ب هـ

أو ينصف د أ هـ

ق (و أ هـ) = ٦٠

ق (ب) = ٦٠

اثبت أن: الشكل أ ب ج د رباعي دائري



٥ في الشكل المقابل :

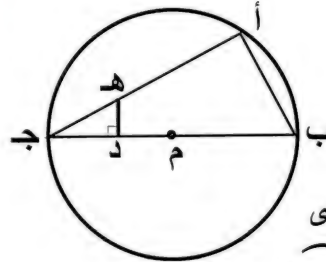
ب ج قطر في الدائرة م

هـ د ⊥ ب ج

اثبت أن:

(١) الشكل أ ب د هـ رباعي دائري

(٢) ق (د هـ ج) = ١/٢ ق (أ ج)



٦ في الشكل المقابل :

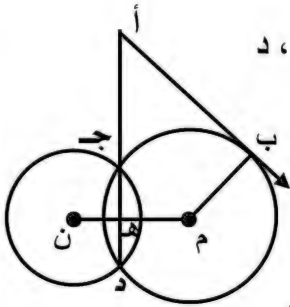
م ، ن دائرتان متقاطعتان في ج ، د

أ ب مماس للدائرة م عند ب

م ن ∩ ج د = { هـ }

اثبت أن :

الشكل أ ب م هـ رباعي دائري



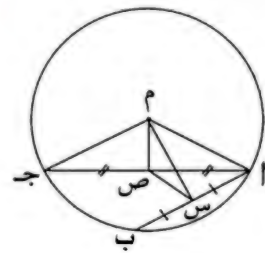
٧ في الشكل المقابل :

س ، ص منتصفا أ ب ، أ ج

على الترتيب

اثبت أن :

أ س ص م رباعي دائري



٨ في الشكل المقابل :

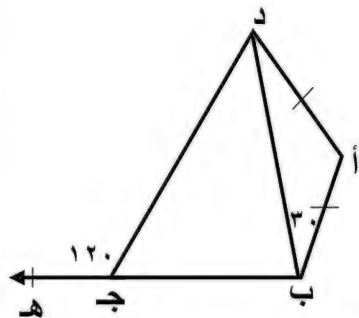
أ د = أ ب

ق (أ ب د) = ٣٠

ق (د ج هـ) = ١٢٠

اثبت أن : الشكل

أ ب ج د رباعي دائري



٩ في الشكل المقابل :

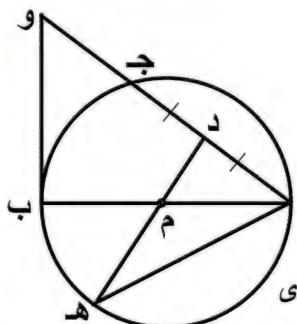
أ ب قطر في الدائرة م

د منتصف أ ج

ب و مماس

اثبت أن : (١) م ب و د رباعي دائري

(٢) ق (و) = ٢ ق (هـ)



١٠ في الشكل المقابل :

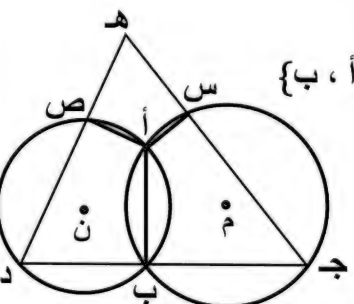
الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ ، ب }

ب ج د

ج س ∩ د ص = { هـ }

اثبت أن

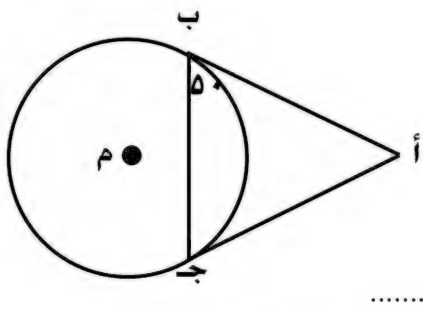
الشكل أ س هـ ص رباعي دائري



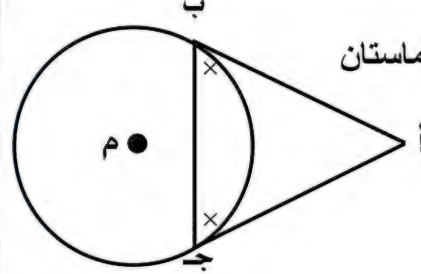
العلاقة بين مماسات الدائرة



القطعتان المماستان المرسومتان من نقطتي خارج دائرة متساويتان في الطول.



ق (أ) = = ق (ب)

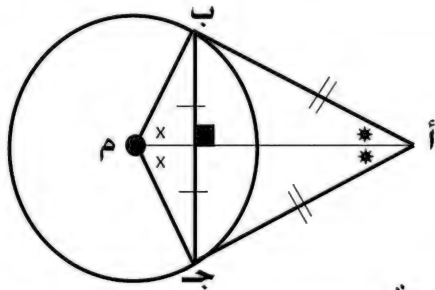


∴ \overline{AB} ، \overline{AC} قطعتان مماستان

∴ $AB = AC$

Δ متساوي الساقين

∴ ق (ب) = ق (ج)



♦ م أ ينصف زاوية أ

♦ م أ ينصف زاوية م

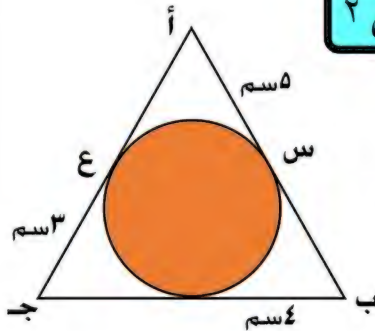
♦ م أ ينصف الوتر ب ج

♦ م أ عمودي على الوتر ب ج

أخلاصة : م أ ينصف زاويتي و وتر

ملاحظة

مثال ٢



Δ أ ب ج يمس الدائرة

من الخارج في س ، ص ، ع

أ س = هـ سم ، ب ص = هـ سم

ج ع = ٣ سم

أوجد محيط Δ أ ب ج

الحل

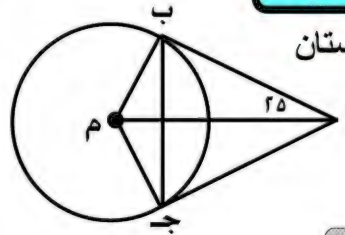
أ س = أ ع = ٥ سم

ب ص = ب س = ٤ سم

ج ع = ج ص = ٣ سم

أ ب = ٥ + ٤ = ٩ سم ، ب ج = ٣ + ٤ = ٧ سم
أ ج = ٣ + ٥ = ٨ سم المحيط = ٩ + ٧ + ٨ = ٢٤ سم

مثال ١



أ ب ، أ ج قطعتان مماستان

ق (ب أ ج) = ٢٥°

أوجد : ق (ب م ج)

الحل

∴ \overline{AB} مماسة ، \overline{AM} نصف قطر ∴ ق (أ ب م) = ٩٠°

في Δ أ ب م :

ق (أ م ب) = ١٨٠ - (٩٠ + ٣٥) = ٥٥°

∴ م أ ينصف ∠ ب م ج

∴ ق (ب م ج) = ٢ × ٥٥ = ١١٠°

عدد المماسات المشتركة

♦ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماسكتين من الداخل ١

♦ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين ٤

♦ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متداخلتين المركز صفر

♦ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماسكتين من الخارج ٣

♦ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متداخلتين صفر

♦ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متقاطعتين ٢

١ في الشكل المقابل :
أ ب ، أ ج قطعتان مماستان
أ ب // ج د ،
ق (ب م د) = 130°
١- اثبت أن : ج ب ينصف أ ج د
٢- أوجد ق (أ)

الحل

∴ ق (ب ج د) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق (م) المركزية

$$\therefore \text{ق (ب ج د)} = 65^\circ$$

$$\therefore \text{أ ب} \parallel \text{ج د}$$

$$\therefore \text{ق (أ ب ج)} = \text{ق (ب ج د)} = 65^\circ \text{ بالتبادل} \quad (1)$$

$$\therefore \text{أ ب} = \text{ب ج} \text{ (قطعتان مماستان)}$$

$$\therefore \text{ق (أ ب ج)} = \text{ق (أ ج ب)} = 65^\circ \quad (2)$$

من ١ ، ٢ ينتج أن : ق (ب ج د) = ق (أ ج ب)

∴ ج ب ينصف أ ج د

$$\text{ق (أ)} = 180^\circ - (65^\circ + 65^\circ) = 50^\circ$$

٣ في الشكل المقابل :
س أ ، س ب مماسان
ق (أ س ب) = 70°
ق (د ج ب) = 125°
اثبت أن : ١- أ ب ينصف د أ س
٢- أ د // س ب

الحل

∴ أ ب ج د رباعي دائري ∴ ق (ج د) + ق (د أ ب) = 180°

$$\therefore \text{ق (د أ ب)} = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ \quad (1)$$

∴ س أ ، س ب مماستان للدائرة ∴ س أ = س ب

∴ Δ س أ ب متساوي الساقين

$$\therefore \text{ق (س أ ب)} = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ \quad (2)$$

من ١ ، ٢ ينتج أن : ق (د أ ب) = ق (س أ ب)

∴ أ ب ينصف د أ س

$$\therefore \text{ق (د أ س)} = 55^\circ + 55^\circ = 110^\circ$$

∴ ق (د أ س) + ق (س ب) = $110^\circ + 70^\circ = 180^\circ$ وهما متداخلتان

$$\therefore \text{أ د} \parallel \text{س ب}$$

٢ في الشكل المقابل :
أ ب ، أ ج قطعتان مماستان
ق (ب م) = 25°
هـ ∩ ب ج الأكبر
أوجد : ١- ق (أ ج ب)
٢- ق (ب هـ ج)

الحل

∴ أ ب ، أ ج قطعتان مماستان ∴ أ م ينصف أ

$$\therefore \text{ق (أ)} = 2 \times 25^\circ = 50^\circ$$

$$\text{في } \Delta \text{ أ ج ب : ق (أ ج ب)} = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ \quad \text{أولاً}$$

∴ أ ج مماسة ، م ج نصف قطر ∴ م ج ⊥ أ ج

$$\therefore \text{ق (أ ج م)} = 90^\circ$$

كذلك ∴ أ ب مماسة ، م ب نصف قطر ∴ م ب ⊥ أ ب

$$\therefore \text{ق (أ ب م)} = 90^\circ$$

في الشكل الرباعي أ ب م ج

$$\text{ق (ج م ب)} = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 50^\circ) = 130^\circ$$

$$\therefore \text{ق (ب هـ ج)} \text{ المحيطية} = \frac{1}{2} \text{ ق (ب م ج) المركزية} = 65^\circ$$

٤ في الشكل المقابل :
أ ب ، أ ج قطعتان مماستان
ق (أ) = 50°
ق (د) = 115°
اثبت أن : ١- ب ج ينصف أ ب هـ
٢- ج ب = ج هـ

الحل

∴ أ ب = أ ج قطعتان مماستان

$$\therefore \text{ق (أ ب ج)} = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ \quad (1)$$

∴ ب ج د هـ رباعي دائري

$$\therefore \text{ق (ج ب هـ)} = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ \quad (2)$$

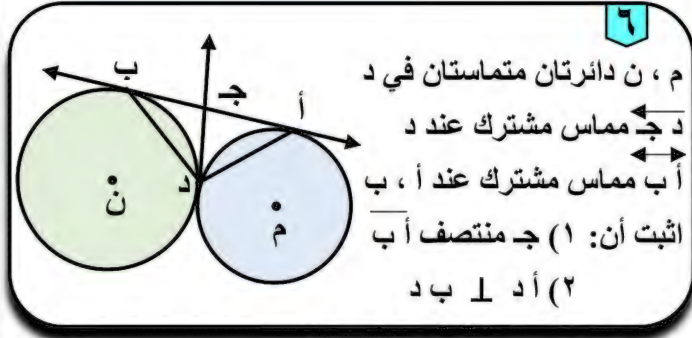
من ١ ، ٢ ينتج أن : ق (أ ب ج) = ق (ج ب هـ)

∴ ب ج ينصف أ ب هـ المطلوب الأول

∴ ق (أ ب ج) = ق (ج ب هـ) = ق (ج هـ ب) المحيطية

من ٣ ، ٤ ينتج أن : ق (ج ب هـ) = ق (ج هـ ب)

∴ ج ب = ج هـ المطلوب الثاني



الحل

في الدائرة م : ج د ، ج أ : ج د ، ج أ : ج د ، ج أ : ج د
 ج د = ج د : ج د = ج د : ج د

في الدائرة ن : ج د ، ج ب : ج د ، ج ب : ج د ، ج ب : ج د
 ج د = ج د : ج د = ج د : ج د

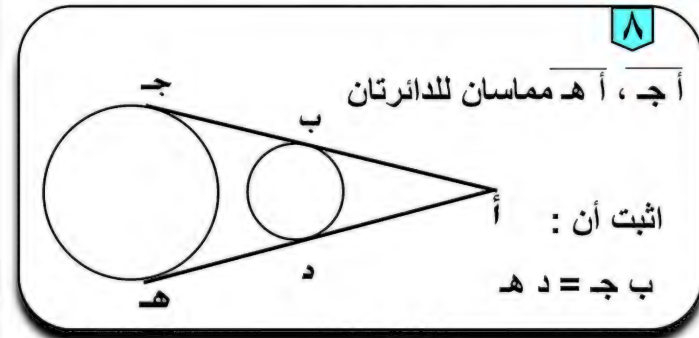
من ١ ، ٢ ينتج أن : ج أ = ج ب

ج د منتصف أ ب : المطلوب الأول

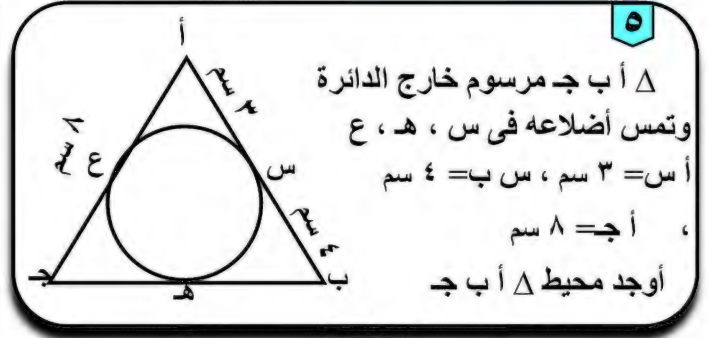
في $\triangle أ د ب$: ج د منتصف أ ب : ج د متوسط

ج د = $\frac{1}{2}$ أ ب : ج د خارج من زاوية قائمة

ج د \perp أ ب د : المطلوب الثاني



الحل



الحل

أ س = أ ع : ج د ، ج أ : ج د ، ج أ : ج د

أ ع = أ س : ج د ، ج أ : ج د ، ج أ : ج د

ج ع = ج د = ٨ - ٣ = ٥ سم

ج د = ج ه : ج د ، ج أ : ج د ، ج أ : ج د

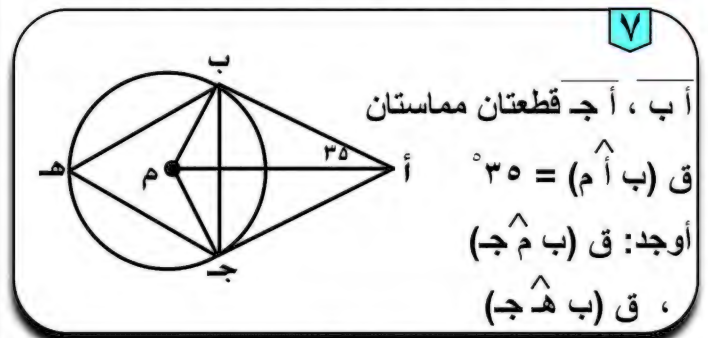
ج ه = ج د = ٥ سم

ب ه = ب س : ج د ، ج أ : ج د ، ج أ : ج د

ب ه = ب س = ٤ سم

ب ج = ب ه + ب س = ٤ + ٥ = ٩ سم

محيط = ٧ + ٨ + ٩ = ٢٤ سم



الحل

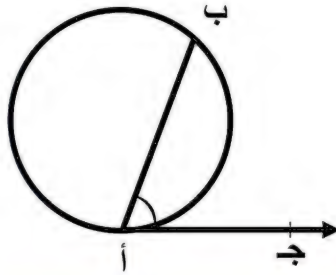
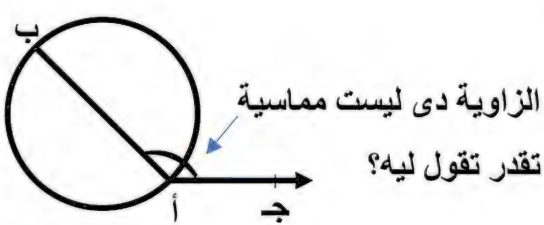
أ ب ، أ ج : ج د ، ج أ : ج د ، ج أ : ج د

ق (ب أ م) = ٣٥°

أوجد : ق (ب م ج)

ق (ب ه ج)

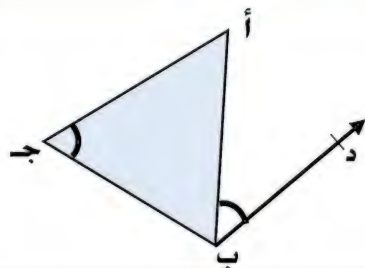
الزاوية المماسية هي زاوية رأسها على الدائرة ومحصورة بين وتر ومماس



- ب أ ج زاوية مماسية
- القوس المقابل لها هو أ ب

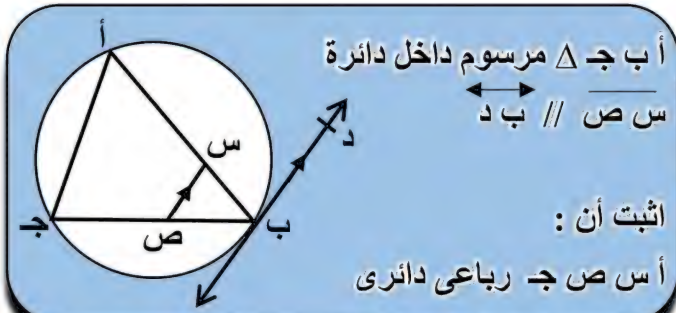
قياس الزاوية المماسية = نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس	قياس الزاوية المماسية = قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس	قياس الزاوية المماسية = نصف قياس القوس المقابل لها زى المحيطية بالظبط
<p>ق (ج أ ب) المماسية = $\frac{1}{2}$ ق (م) المركزية مشتركتان في ج أ ∴ ق (ج أ ب) = 49°</p>	<p>ق (ج أ ب) المماسية = ق (د) المحيطية مشتركتان في ج أ ∴ ق (ج أ ب) = 65°</p>	<p>ق (أ ب ج) المماسية = $\frac{1}{2}$ ق (ب ج) ∴ ق (أ ب ج) = 70°</p>

لإثبات أن ب د مماس للدائرة التي تمر برؤوس \triangle أ ب ج



نثبت أن :

$$\angle (أ ب د) = \angle (ج د)$$



الحل

$$\therefore \text{س ص} \parallel \text{ب د}$$

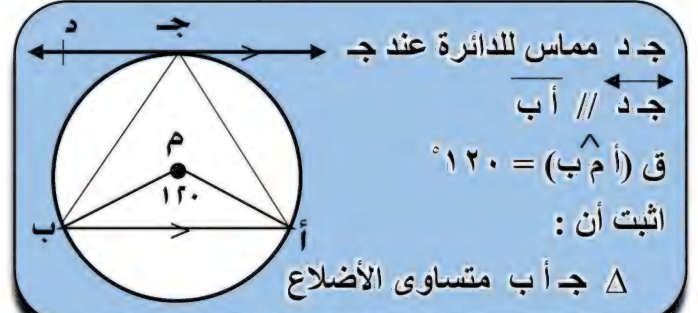
١) $\therefore \text{ق} (\hat{\text{أ ب د}}) = \text{ق} (\text{ص س ب})$ بالتبادل

٢) $\therefore \text{ق} (\hat{\text{أ ب د}}) = \text{المماسية} = \text{ق} (\hat{\text{ج}}) \text{ المحيطية}$

من ١، ٢ ينتج أن :

$$\text{ق} (\text{ص س ب}) = \text{ق} (\hat{\text{ج}})$$

أي أن : قياس الزاوية الخارجة = قياس المقابلة للمجاورة
 \therefore الشكل أ س ص ج رباعي دائري



الحل

$$\therefore \text{ج د} \parallel \text{أ ب}$$

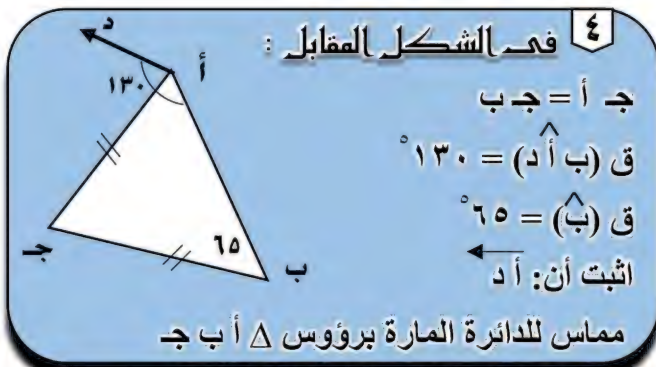
١) $\therefore \text{ق} (\hat{\text{د ج ب}}) = \text{ق} (\hat{\text{ج ب أ}})$ بالتبادل

٢) $\therefore \text{ق} (\hat{\text{د ج ب}}) = \text{المماسية} = \text{ق} (\hat{\text{ج أ ب}}) \text{ المحيطية}$

من ١، ٢ ينتج أن : $\text{ق} (\hat{\text{ج ب أ}}) = \text{ق} (\hat{\text{ج أ ب}})$

$\therefore \Delta \text{ ج أ ب}$ متساوي الساقين

$\therefore \text{ق} (\hat{\text{م}}) \text{ المركزية} = 120^\circ \therefore \text{ق} (\hat{\text{أ ج ب}}) = 60^\circ$
 $\therefore \Delta \text{ ج أ ب}$ متساوي الأضلاع



الحل

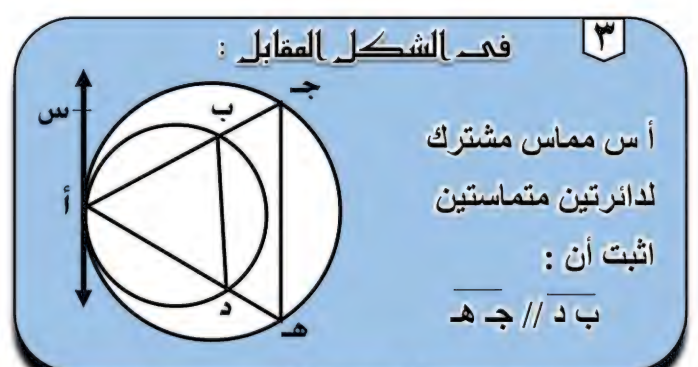
$$\therefore \text{ج أ} = \text{ج ب}$$

$$\therefore \text{ق} (\hat{\text{ج أ ب}}) = \text{ق} (\hat{\text{ب}}) = 65^\circ$$

$$\therefore \text{ق} (\hat{\text{د أ ج}}) = 65 - 130 = 65^\circ$$

$$\therefore \text{ق} (\hat{\text{د أ ج}}) = \text{ق} (\hat{\text{ب}})$$

$\therefore \text{أ د مماس}$ للدائرة المارة برؤوس $\Delta \text{ أ ب ج}$



الحل

في الدائرة الصغرى :

١) $\therefore \text{ق} (\text{س أ ب}) = \text{المماسية} = \text{ق} (\hat{\text{أ د ب}}) \text{ المحيطية}$
 مشتركتان في القوس أ ب

في الدائرة الكبرى :

٢) $\therefore \text{ق} (\text{س أ ج}) = \text{المماسية} = \text{ق} (\hat{\text{أ ه ج}}) \text{ المحيطية}$
 لأنهما مشتركتان في القوس أ ج

من ١، ٢ ينتج أن :

$\therefore \text{ق} (\hat{\text{أ د ب}}) = \text{ق} (\hat{\text{أ ه ج}})$ وهما في وضع تناظر
 $\therefore \text{ب د} \parallel \text{ج ه}$

١

دائرة تماس أضلاع \triangle س ص ع
في أ، ب، ج، ق (ص) = 40°
ق (ع) = 64°
أوجد قياسات زوايا \triangle أ ب ج

الحل

٢

أ ب، أ ج قطعتان مماستان
ب ج = ب د
ق (أ) = 70°
أوجد: ق (أ ب د)

الحل

٣

أ ب ج قائم في أ
ق (د أ ب) = 60° ، أ ج = ٤ سم
ب ج = ٨ سم، أثبت أن: أ د مماس للدائرة المارة برؤوس أ ب ج

الحل

٤

أ ب ج \triangle مرسوم داخل دائرة
أ د مماس للدائرة
س ص // ب ج
اثبت أن: أ د مماس للدائرة
المارة برؤوس \triangle أ س ص

الحل

أسئلة اختر على الهندسة

- ١ عدد محاور التماثل لأي دائرة هو
 (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) عدد لا نهائي
- ٢ عدد محاور تماثل نصف الدائرة هو
 (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) عدد لا نهائي
- ٣ وتر طوله ٨ سم في دائرة طول نصف قطرها ٥ سم فإنه يبعد عن مركزها سم
 (أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٨
- ٤ إذا كان المستقيم l \cap الدائرة $m = \emptyset$ فإن المستقيم l يكون
 (أ) محور تماثل (ب) خارج (ج) قاطع (د) مماس
- ٥ إذا كان المستقيم مماساً للدائرة التي قطرها ٨ سم فإنه يبعد عن مركزها سم
 (أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ٨
- ٦ دائرة محيطها ٦ π سم والمستقيم l يبعد عن مركزها ٣ سم فإن المستقيم l يكون
 (أ) مماس للدائرة (ب) قاطع للدائرة (ج) خارج الدائرة (د) قطر في الدائرة
- ٧ خط المراكزين لدائرتين متقاطعتين يكون عمودياً على وينصفه
 (أ) القطر (ب) الوتر (ج) الوتر المشترك (د) المماس
- ٨ دائرتان m ، n متماستان من الداخل ، أنصاف أقطارهم ٥ سم ، ٩ سم فإن $m = n$ سم
 (أ) ١٤ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٩
- ٩ m ، n دائرتان متقاطعتان وطولان نصفى قطريهما ٥ سم ، ٢ سم فإن $m = n$
 (أ) $[٧, ٣]$ (ب) $[٧, ٣]$ (ج) $[٧, ٣]$ (د) $[٧, ٣]$
- ١٥ إذا كان سطح الدائرة m \cap سطح الدائرة $n = \{ أ \}$ وطول نصف قطر أحدهما ٣ سم ، $m = n = ٨$ سم
 فإن طول نصف قطر الأخرى = سم
 (أ) ٥ (ب) ٦ (ج) ١١ (د) ١٦
- ١٥ إذا كان الدائرتان m ، n متماستان من الخارج وطول نصف قطر إحداهما ٥ سم ، $m = n = ٩$ سم
 فإن طول نصف قطر الأخرى = سم
 (أ) ٤ (ب) ٥ (ج) ٩ (د) ١٤
- ١٢ m دائرة طول قطرها ٧ سم ، أ نقطة في مستوى الدائرة وكان $m = ٤$ سم فإن أ تقع
 (أ) داخل الدائرة (ب) خارج الدائرة (ج) على الدائرة (د) على مركز الدائرة

١٣ عدد الدوائر التي تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة هو

- (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

١٤ لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس

- (أ) المثلث (ب) المربع (ج) المعين (د) المستطيل

١٥ يمكن رسم دائرة تمر برؤوس

- (أ) معين (ب) مستطيل (ج) شبه منحرف (د) متوازي أضلاع

١٦ مركز الدائرة الداخلة لأي مثلث هو نقطة تقاطع

- (أ) متوسطات المثلث (ب) ارتفاعات المثلث (ج) محاور تماثل أضلاعه (د) منصفات زواياه الداخلة

١٧ مركز الدائرة الخارجة لأي مثلث هو نقطة تقاطع

- (أ) متوسطات المثلث (ب) ارتفاعات المثلث (ج) محاور تماثل أضلاعه (د) منصفات زواياه الداخلة

١٨ قياس القوس الذي يمثل ثلث قياس الدائرة =

- (أ) ٣٦٠ (ب) ١٨٠ (ج) ١٢٠ (د) ٩٠

١٩ النسبة بين قياس الزاوية المحيطية وقياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس =

- (أ) ٢ : ١ (ب) ٣ : ١ (ج) ١ : ٢ (د) ١ : ٣

٢٥ طول نصف الدائرة التي طول نصف قطرها نق سم = سم

- (أ) 2π نق (ب) $\frac{1}{4}\pi$ نق (ج) $\frac{1}{3}\pi$ نق (د) π نق

٢٦ قياس الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة =

- (أ) 45° (ب) 90° (ج) 120° (د) 180°

٢٧ أ ب ج د شكل رباعي دائري فيه ق (أ) = 60° فإن ق (ج) =

- (أ) 60° (ب) 30° (ج) 90° (د) 120°

٢٨ إذا كان الشكل أ ب ج د رباعي دائري وكان ق (أ) = $\frac{1}{4}$ ق (ج) فإن ق (أ) =

- (أ) 90° (ب) 60° (ج) 120° (د) 180°

٢٩ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الخارج =

- (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

٣٠ المماسان المرسومان من نهايتي قطري دائرة يكونان

- (أ) متوازيان (ب) منطبقان (ج) متقاطعان (د) متساويان في الطول

٢٦ الزاوية المماسية هي زاوية محصورة بين

- (أ) وتران (ب) مماسان (ج) وتر ومماس (د) وتر وقطر

٢٧ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتان هو

- (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

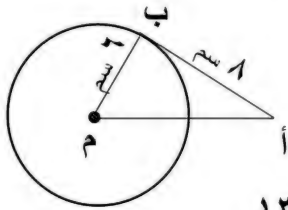
٢٨ الزاوية المحيطية التي تقابل قوساً أصغر في الدائرة تكون

- (أ) منعكسة (ب) قائمة (ج) منفرجة (د) حادة

٢٩ الشكل الرباعي الدائري في الأشكال التالية هو

- (أ) المعين (ب) المستطيل (ج) متوازي الأضلاع (د) شبه المنحرف

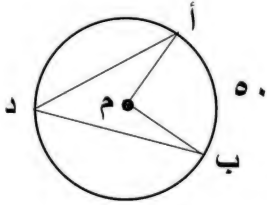
أسئلة اختر على الرسومات



١ في الشكل المقابل : أ ب مماس للدائرة م

م ب = ٦ سم ، أ ب = ٨ سم فإن أ م = سم

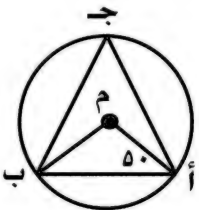
- (أ) ٥ (ب) ١٠ (ج) ١٢ (د) ١٣



٢ في الشكل المقابل : دائرة مركزها م

إذا كان ق (أ ب) = ٥٠° فإن ق (أ د ب) =

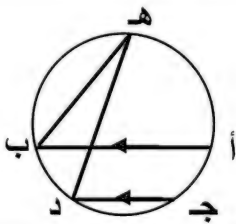
- (أ) ٢٥° (ب) ٥٠° (ج) ١٠٠° (د) ١٥٠°



٣ في الشكل المقابل : دائرة مركزها م

ق (م أ ب) = ٥٠° فإن ق (ج) =

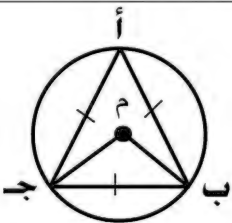
- (أ) ٥٠° (ب) ٨٠° (ج) ٤٠° (د) ٣٠°



٤ في الشكل المقابل : أ ب // ج د

ق (أ ج) = ٣٠° فإن ق (ب هـ د) =

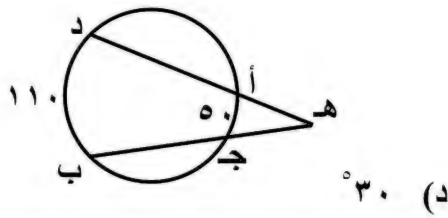
- (أ) ١٠° (ب) ١٥° (ج) ٣٠° (د) ٦٠°



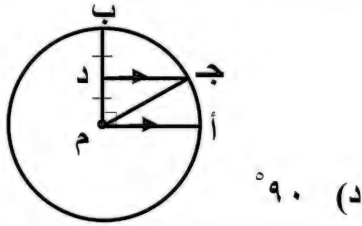
٥ في الشكل المقابل : أ ب ج د متساوي الأضلاع

فإن ق (ب م ج) =

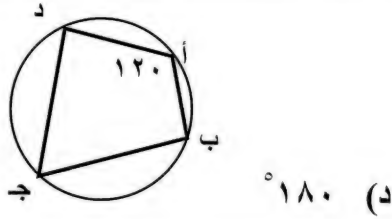
- (أ) ٥٠° (ب) ٦٠° (ج) ١٢٠° (د) ١٠٠°



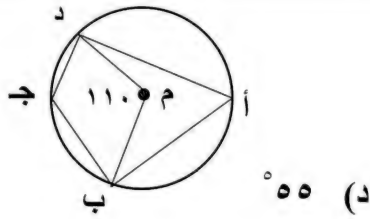
٦ في الشكل المقابل : ق (أ ج) = ٥٠° ،
ق (د ب) = ١١٠° فإن ق (هـ) =
(أ) ٦٠° (ب) ٥٠° (ج) ٤٠° (د) ٣٠°



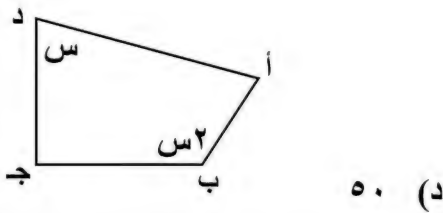
٧ في الشكل المقابل : أم // جد ، م د = د ب
ق (أ م ب) = ٩٠° فإن ق (أ ج) =
(أ) ٤٥° (ب) ٦٠° (ج) ٣٠° (د) ٩٠°



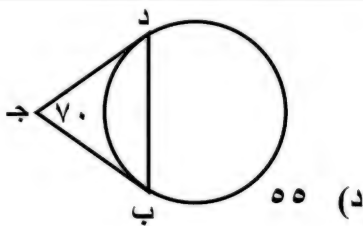
٨ في الشكل المقابل : ق (أ) = ١٢٠°
فإن ق (ج) =
(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (ج) ١٢٠° (د) ١٨٠°



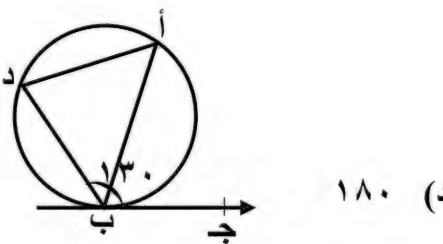
٩ في الشكل المقابل : دائرة مركزها م
ق (ب م د) = ١١٠° فإن ق (ج) =
(أ) ٧٠° (ب) ١١٠° (ج) ١٢٥° (د) ٥٥°



١٥ في الشكل المقابل : أ ب ج د شكل رباعي دائري
فإن س =
(أ) ١٢٠ (ب) ١٠٠ (ج) ٦٠ (د) ٥٠



١٥ في الشكل المقابل : ج ب ، ج د قطعتان مماستان
ق (ج) = ٧٠° فإن ق (د ب) الأصغر =
(أ) ٧٠ (ب) ١١٠ (ج) ١٢٥ (د) ٥٥



١٦ في الشكل المقابل : ب ج مماس للدائرة
ق (د ب ج) = ١٣٠° فإن ق (أ) =
(أ) ٥٠ (ب) ٦٥ (ج) ١٣٠ (د) ١٨٠

تعالوا بينا نحل مسائل نماذج امتحانات الكتاب المدرسي اللي دائما بييجي منها
في الامتحان عشان مهمة جدًا و تعتبر أهم من مسلسل سلسال الدم

اختر تراکمی

١ مساحة المعين الذى طولاً قطريه ٦ سم ، ٨ سم = سم^٢

الحل: مساحة المعين = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولاً قطريه = $\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$ سم^٢

٢ * مجموع طولى أي ضلعين في المثلث طول الضلع الثالث

❦ ٣ في المثلث أ ب ج إذا كان $\angle(أ ج) = ٢ \angle(أ ب) + \angle(ب ج)$ فإن زاوية ب تكون


❖ في المثلث أ ب ج إذا كان $\angle(أ ج) < \angle(أ ب) + \angle(ب ج)$ فإن زاوية ب تكون

❖ في المثلث أ ب ج إذا كان $\angle(أ ج) < \angle(أ ب) + \angle(ب ج)$ فإن زاوية ب تكون

٦ قياس زاوية الشكل السداسى المنتظم =

عدد محاور تماثل المربع = ، عدد محاور تماثل المستطيل =

٨ ميل المستقيم الذي معادلته $3x - 4y + 12 = 0$ هو

ميل المستقيم الموازي لمحور السينات = 

١٥ عدد محاور تماثل نصف الدائرة عدد محاور تماثل المثلث المتساوي الساقين

١٥ القطران المتساويان في الطول وغير متعامدان في

۱۲ مربع محیطه ۲۰ سم تكون مساحته = سم^۲

١٣ إذا كان A بقطر في دائرة m حيث $A(3, -5)$ ، $B(5, 1)$ فإن مركز الدائرة m هو

١٤ دائرة محيطها π فإن طول قطرها =

١٥ في المثلث القائم طول المتوسط الخارج من الزاوية القائمة يساوى

٥٦ في المثلث القائم طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠ يساوى

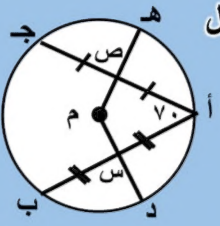
١٧ عدد المستطيلات في الشكل المقابل

مجله اول ریاضیات؛

انتهاء المذاكرة مع ضمان الجودة لكل بالوفيق والجاهد والاستمرار في الجاهد



٢



أ ب ، أ د وتران متساويان في الطول
س منتصف أ ب ، ص منتصف أ ج
ق (ج أ ب) = 70°
١- أوجد ق (د م هـ)
٢- أثبت أن س د = ص هـ

الحل

∴ س منتصف أ ب ∴ م س ⊥ أ ب
∴ ق (م س أ) = 90°

∴ ص منتصف أ ج ∴ م ص ⊥ أ ج
∴ ق (م ص أ) = 90°

∴ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي أ س م ص = 360°
∴ ق (د م هـ) = $360^\circ - (70^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 110^\circ$

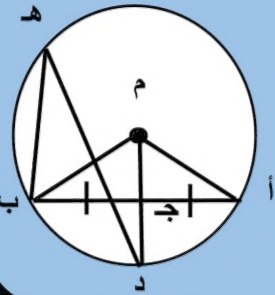
∴ أ ج = أ ب (أوتار متساوية)

∴ م ص = م س (أبعاد متساوية)

∴ م هـ = م د (أنصاف أقطار)

بطرح ١ من ٢ ينتج: ص هـ = س د المطلوب الثاني

٤



ج منتصف أ ب
ق (م أ ب) = 20°
أوجد: ق (ب هـ د) ، ق (أ د ب)

الحل

∴ م أ = م ب (أنصاف أقطار)

∴ Δ م أ ب متساوي الساقين ∴ ق (م أ ب) = 20°

∴ ج منتصف أ ب ∴ م ج ⊥ أ ب ∴ ق (م ج ب) = 90°

في Δ م ج ب: ق (ج م ب) = $180^\circ - (20^\circ + 90^\circ) = 70^\circ$

∴ ق (ب هـ د) = $\frac{1}{2}$ ق (د م ب)

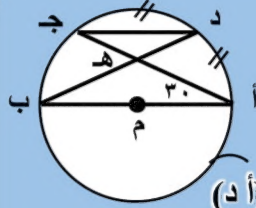
محيطية ومركزية مشتركتان في أ ب

∴ ق (ب هـ د) = 35° المطلوب الأول

في Δ أ م ب: ق (أ م ب) = $180^\circ - (20^\circ + 20^\circ) = 140^\circ$

∴ ق (أ د ب) = ق (أ م ب) المركزية = 140°

١



أ ب قطر في الدائرة م
ق (ج أ ب) = 30°
د منتصف أ ج
١- أوجد ق (ب د ج) ، ق (أ د)
٢- أثبت أن: أ ب // ج د

الحل



∴ ق (ب د ج) = ق (ج أ ب)

محيطيتان مشتركتان في ج ب

∴ ق (ب د ج) = 30° أولاً

∴ ق (ج ب) = $30^\circ \times 2 = 60^\circ$

∴ ق (أ د ج) + ق (ج ب) = 180°

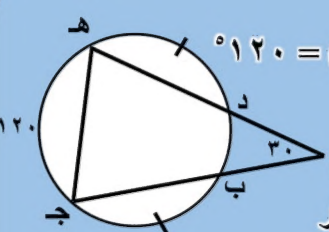
∴ ق (أ د ج) = $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

∴ ق (أ د) = ق (د ج) ∴ ق (أ د) = $\frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$

∴ ق (د ب أ) المحيطة = $\frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

∴ ق (ب د ج) = ق (د ب أ) وهما متبادلتان ∴ أ ب // ج د

٣



ق (أ) = 30° ، ق (هـ ج) = 120°
ق (ب ج) = ق (د هـ)
١- أوجد: ق (ب د) الأصغر
٢- أثبت أن: أ ب = أ د

الحل

من تمرين مشهور ٢ :

ق (ب د) = ق (هـ ج) - ق (أ) = $120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$

∴ ق (د هـ) = ق (ب ج) بإضافة د ب للطرفين

∴ ق (ب د هـ) = ق (د ب ج)

∴ ق (ج هـ) المحيطة = ق (هـ هـ) المحيطة

∴ أ ج = أ هـ

∴ ق (د هـ) = ق (ب ج) ∴ د هـ = ب ج

بطرح ٢ من ١ ينتج أن: أ ب = أ د



٦

أ و مماس للدائرة عند أ
أو // د ه
برهن أن :
د ه ب ج شكل رباعي دائري

الحل

١. ∴ أ و // د ه
∴ ق (و أ ب) = ق (أ ه د) بالتبادل
٢. ∴ ق (و أ ب) المماسية = ق (ج د) المحيطية

من ١، ٢ ينتج أن :

$$ق (أ ه د) = ق (ج د)$$

ونلاحظ أن أ ه د زاوية خارجة ، ج ه هي المقابلة للمجاورة

∴ الشكل د ه ب ج رباعي دائري

٥

أ ب ج د شكل رباعي فيه
أ ب = أ د
ق (أ ب د) = ٣٠° ، ق (ج د) = ٦٠°
اثبت أن : الشكل أ ب ج د رباعي دائري

الحل

- ∴ أ ب = أ د ∴ Δ أ ب د متساوي الساقين
∴ ق (أ د ب) = ٣٠°

$$∴ ق (أ) = ١٨٠ - (٣٠ + ٣٠) = ١٢٠°$$

$$∴ ق (أ) + ق (ج د) = ١٢٠ + ٦٠ = ١٨٠°$$

وهما زاويتان متقابلتان متكاملتان

∴ الشكل أ ب ج د رباعي دائري

٨

ب ج مماس للدائرة عند ب
ه منتصف ب و
اثبت أن :
أ ب ج د رباعي دائري

الحل

- ∴ ق (ب ه) = ق (ه و)
∴ ق (ب أ ه) = ق (ه أ و)
∴ ق (ب أ ه) المحيطية = ق (ج ب ه) المماسية

من ١، ٢ ينتج أن :

$$ق (ج ب ه) = ق (ه أ و)$$

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وهي ج د
وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل أ ب ج د رباعي دائري

٧

أ ب ج د مثلث مرسوم داخل دائرة
د ب مماس للدائرة عند ب
س ص // ب د
اثبت أن :
أ س ص ج رباعي دائري

الحل

$$∴ س ص // ب د$$

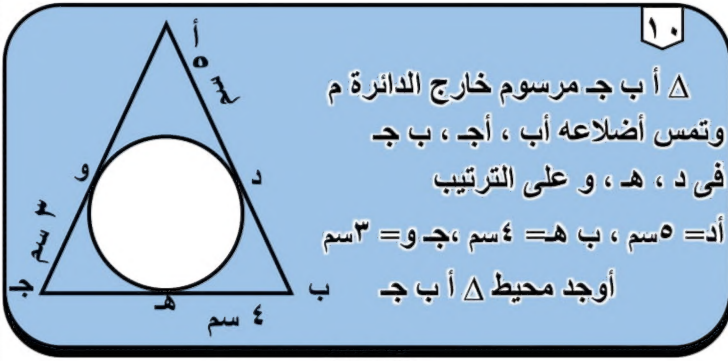
- ∴ ق (أ ب د) = ق (ص س ب) بالتبادل
∴ ق (أ ب د) المماسية = ق (ج د) المحيطية

من ١، ٢ ينتج أن :

$$ق (ص س ب) = ق (ج د)$$

أي أن : قياس الزاوية الخارجة = قياس المقابلة للمجاورة

∴ الشكل أ س ص ج رباعي دائري



الحل

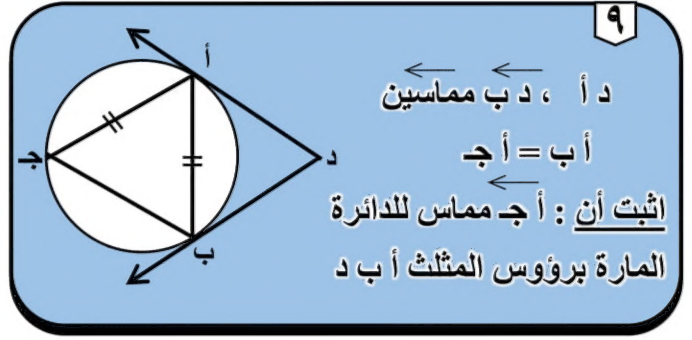
في $\triangle ABC$ مرسوم خارج الدائرة م
وتمس أضلاعه AB ، BC ، CA في D ، E ، F على الترتيب
أد = ٥ سم ، ب هـ = ٤ سم ، ج و = ٣ سم
أوجد محيط $\triangle ABC$

أد ، أو قطعتان مماستان : $AD = AE = ٥$ سم
ب د ، ب هـ قطعتان مماستان : $BD = BE = ٤$ سم
ج هـ ، ج و قطعتان مماستان : $CE = CF = ٣$ سم

أب = ٥ + ٤ = ٩ سم ، أ ج = ٥ + ٣ = ٨ سم
ب ج = ٤ + ٣ = ٧ سم

محيط $\triangle ABC$ = ٩ + ٨ + ٧ = ٢٤ سم

نصه عوض حسن
معلم اول رياضيات



الحل

في $\triangle ABC$: $AB = AC$
ق (أ ب ج) = ق (أ ج ب) \leftarrow ١

في $\triangle ABC$: $AD = DB$ لأنهما قطعتان مماستان
ق (د أ ب) = ق (د ب أ) \leftarrow ٢

ق (د أ ب) المماسية = ق (أ ج ب) المحيطة \leftarrow ٣

من ١ ، ٢ ، ٣ وبمقارنة المثلثين ينتج أن :
ق (ب أ ج) = ق (د أ ب)
أ ج مماس للدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب د

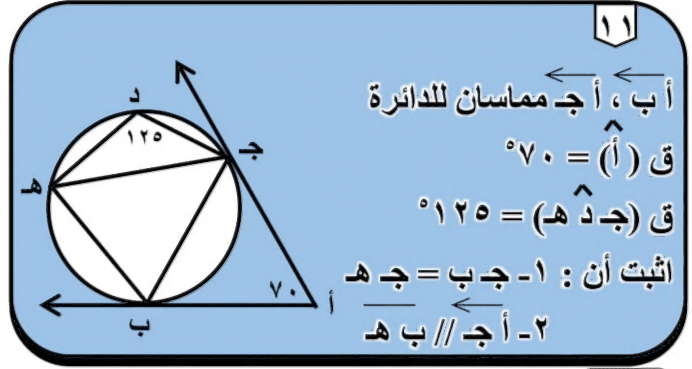


الحل

دائرتان متماستان من الداخل في ب
أ ب مماس مشترك للدائرتين
أ ج مماس للصغرى ، أ ب مماس للكبرى
أ ج = ١٥ سم ، أ ب = (٣ - ٢) سم
أ د = (٢ - ص) سم أوجد قيمة ص

أ ب = أ ج : قطعتان مماستان للدائرة الصغرى
أ ب = ١٥ سم : $١٥ = ٣ - ٢$ سم
١٨ = ٢ سم : $٩ = ٢$ سم

أ ب = أ د : قطعتان مماستان للدائرة الكبرى
أ د = ١٥ سم : $١٥ = ٢ - ص$
١٧ = ص



الحل

الشكل د ج ب هـ رباعي دائري
ق (ج ب هـ) = $١٨٠ - ١٢٥ = ٥٥^\circ$ \leftarrow ١
أ ج ، أ ب قطعتان مماستان
ق (أ ج ب) = ق (أ ب ج) = $\frac{٧٠ - ١٨٠}{٢} = ٥٥^\circ$
ق (ب هـ ج) المحيطة = ق (أ ج ب) المماسية = ٥٥° \leftarrow ٢

من ١ ، ٢ ينتج أن : ق (ج ب هـ) = ق (ب هـ ج)
 $\triangle ج ب هـ$ متساوي الساقين : $ج ب = ج هـ$ أولا
ق (أ ج ب) = ق (ج ب هـ) = ٥٥°
وهما متبادلتان : $أ ج \parallel ب هـ$